批注式详答与详析

扫码查看教材习题答案

第六章　特殊平行四边形

1　菱形的性质与判定

课时 1　菱形的性质

刷基础

1. B　【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 又 $\because AB=BC$（一组邻边相等），$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形. 故选 B.

2. A　【解析】$\because$ 在菱形 $ABCD$ 中，P,Q 分别是 AD,AC 的中点，$\therefore PQ$ 是三角形 ADC 的中位线，$\therefore CD=2PQ=4$，$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的周长 $=4\times4=16$，故选 A.

3. A　【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AD/\!/BC$，$AC\perp BD$，$\therefore \angle OBC=\angle1=70°$. $\because AC\perp BD$，$\therefore \angle BOC=90°$，$\therefore \angle2=90°-\angle OBC=20°$，故选 A.

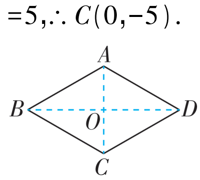
4. D　【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AC\perp BD$，$AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times16=8$，$\therefore \angle AOB=90°$，$\therefore OB=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$. $\because OP\perp AB$，$\therefore \triangle AOB$ 的面积 $=\frac{1}{2}AB\cdot OP=\frac{1}{2}AO\cdot OB$，$\therefore 10\times OP=8\times6$，$\therefore OP=\frac{24}{5}$. 故选 D.

▶关键点拨　由三角形的面积公式得到 $AB\cdot OP=AO\cdot OB$ 是解题的关键.

5. $(0,-5)$　【解析】由菱形的性质易得 $AD\perp x$ 轴. $\because A(12,13)$，$\therefore OD=12$，$AD=13$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore CD=AD=13$. 在 Rt$\triangle ODC$ 中，$OC=\sqrt{CD^2-OD^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$，$\therefore C(0,-5)$.

▶思路分析　由菱形的性质推出 CD 的长，再在 Rt$\triangle ODC$ 中，利用勾股定理求出 OC 的长即可解决问题.

6. $2\sqrt{3}$　【解析】连接 AC,BD 相交于点 O，如图. 由题意知四边形 $ABCD$ 为菱形，$\therefore AC\perp BD$，$BO=DO$，$\angle ABD=\angle CBD$. $\because AB=2$，$\angle ABC=60°$，$\therefore \angle ABD=\angle CBD=30°$，$\therefore AO=\frac{1}{2}AB=1$. 由勾股定理得 $BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{3}$，$\therefore BD=2BO=2\sqrt{3}$，即 B,D 两点间的距离为 $2\sqrt{3}$，故答案为 $2\sqrt{3}$.



7. 45　【解析】$\because \angle AEB=105°$，$\therefore \angle AED=75°$. $\because AD=DE$，$\therefore \angle AED=\angle EAD=75°$，$\therefore \angle ADB=30°$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AB=AD$，$\therefore \angle ABD=\angle ADB=30°$，$\therefore \angle BAE=\angle AED-\angle ABD=45°$. 故答案为 45.

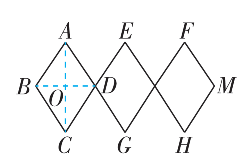
8. (1)【证明】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AB=BC$，$\angle ABD=\angle CBD$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CBE$ 中，$\begin{cases}AB=BC,\\ \angle ABE=\angle CBE,\\ BE=BE,\end{cases}$ $\therefore \triangle ABE\cong\triangle CBE$（SAS），

$\therefore AE=CE$.

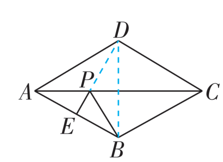
(2)【解】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AB=AD$，$\therefore \angle ABD=\angle ADB$. $\because AE=DE$，$\therefore \angle EAD=\angle ADB=\angle ABD$. 由 (1) 知 $\triangle ABE\cong\triangle CBE$，$\therefore \angle BAE=\angle BCE=75°$. $\because \angle ABD+\angle ADB+\angle DAE+\angle BAE=180°$，$\therefore 3\angle ABD+75°=180°$，$\therefore \angle ABD=35°$，$\therefore \angle ABC=2\angle ABD=70°$.

刷提升

1. C　【解析】如图，连接 AC,BD 交于点 O. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$AC=32$ cm，$\therefore AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times32=16$(cm)，$AC\perp BD$，$BD=2OB$. $\because$ 菱形 $ABCD$ 的边长为 20 cm，$\therefore OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=\sqrt{20^2-16^2}=12$(cm)，$\therefore BD=2OB=24$ cm. $\because$ 图中是 3 个全等的菱形，$\therefore B,M$ 之间的距离为 $3BD=72$ cm. 故选 C.



（第 1 题图）

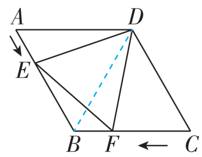


（第 2 题图）

2. B　【解析】如图，连接 BD，由菱形的对角线互相垂直平分，可得 B,D 关于 AC 对称，连接 DE 交 AC 于点 P，此时 $PE+PB$ 的值最小，$\therefore PE+PB=PE+PD=DE$，即 DE 的长就是 $PE+PB$ 的最小值. $\because$ 菱形 $ABCD$，$\therefore AD=AB=2$. 又 $\because \angle BAD=60°$，$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形. $\because E$ 是 AB 的中点，$\therefore DE$ 是$\triangle ABD$ 的边 AB 上的中线，$AE=\frac{1}{2}AB=1$，$\therefore DE\perp AB$，$\therefore \angle AED=90°$. 在Rt$\triangle ADE$ 中，$DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{2^2-1^2}=$

$\sqrt{3}$，即 $PE+PB$ 的最小值为$\sqrt{3}$. 故选 B.

3. D 【解析】连接 BD，如图.



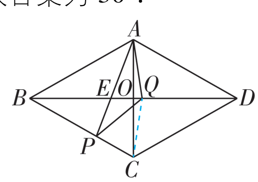
∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，∴ $AD//BC$，$AB=AD$，$\angle A=180°-\angle ADC=60°$，$\angle ADB=\frac{1}{2}\angle ADC=60°$，∴ $\angle DBF=\angle ADB=60°=\angle A$，$\triangle ABD$ 是等边三角形，∴ $AD=BD$. ∵ $\triangle DEF$ 是等边三角形，∴ $\angle EDF=60°$. 又∵ $\angle ADB=60°$，∴ $\angle ADE=\angle BDF=60°-\angle BDE$. 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BDF$ 中，

$$\begin{cases}\angle ADE=\angle BDF,\\ AD=BD,\\ \angle A=\angle DBF,\end{cases}$$

∴ $\triangle ADE\cong\triangle BDF$（ASA），∴ $AE=BF$. 易知$\triangle DEF$ 为等边三角形时，点 F 未到达点 B，此时 $AE=t$，$CF=2t$，∴ $BF=BC-CF=5-2t$，∴ $t=5-2t$，∴ $t=\frac{5}{3}$，故选 D.

4. $\underline{30°}$ 【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形，∴ $\angle B=\angle D$，$\angle B+\angle BAD=180°$. 由折叠的性质可知，$\angle B=\angle AOM$，$\angle D=\angle AON$，$\angle BAM=\angle OAM=\angle DAN=\angle OAN=\frac{1}{4}\angle BAD$. ∵ $\angle MON=80°$，∴ $\angle AOM=\angle AON=\frac{1}{2}\times(360°-80°)=140°$，∴ $\angle B=\angle AOM=140°$，∴ $\angle BAD=40°$，∴ $\angle OAM=10°$，∴ $\angle AMO=180°-140°-10°=30°$，故答案为 30°.

5. (1)【解】点 Q 在线段 PC 的垂直平分线上.



理由：如图，连接 QC. ∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC，BD 相交于点 O，∴ $BD\perp AC$，$OA=OC$，∴ $QA=QC$. ∵ $QA=QP$，∴ $QC=QP$，∴ 点 Q 在线段 PC 的垂直平分线上.

(2)【证明】∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，∴ $AB=BC=CD=DA$，∴ $\angle ABD=\angle ADB=\angle CBD=\angle CDB$. ∵ $\angle BAP=\angle ADB$，∴ $\angle BAP=\angle ABD=\angle CBD$，∴ $AE=BE$. ∵ $\angle APB=90°$，∴ $\angle BAP+\angle ABP=90°$，∴ 易得$\angle BAP=\angle ABD=\angle CBD=30°$，∴ $\angle ABC=60°$. ∵ $AB=BC$，∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形. ∵ $\angle APB=90°$，∴ $AP\perp BC$，∴ $BP=CP$.

刷素养

6. (1)【证明】∵ 四边形 $APCD$ 为菱形，∴ $PA=PC$，$\angle APD=\angle CPD$. 在 $\triangle AEP$ 和 $\triangle CEP$ 中，

$$\begin{cases}PA=PC,\\ \angle APE=\angle CPE,\\ PE=PE,\end{cases}$$

∴ $\triangle AEP\cong\triangle CEP$（SAS）.

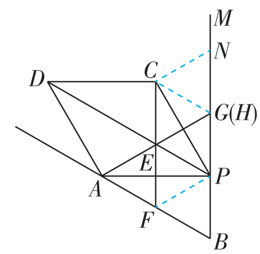
【解】(2) CF 与 BM 的位置关系是 $CF//BM$. 证明如下：∵ $\angle ABM=60°$，∴ $\angle BAP+\angle BPA=180°-\angle ABM=120°$. ∵ $\angle APC=60°$，

思路分析 由菱形的性质，可知 B，D 关于 AC 对称，连接 DE 交 AC 于点 P，则 $PD=PB$，易知 DE 的长就是 $PE+PB$ 的最小值，再由勾股定理求出 DE 的长即可解决问题.

关键点拨 掌握菱形的几种判定方法是解题关键.

∴ $\angle CPM+\angle BPA=180°-\angle APC=120°$，∴ $\angle BAP=\angle CPM$. 由（1）可知 $\triangle AEP\cong\triangle CEP$，∴ $\angle PAE=\angle PCE$. ∵ AP 为$\angle BAG$ 的平分线，∴ $\angle PAE=\angle BAP$，∴ $\angle PCE=\angle CPM$，∴ $CF//BM$.

(3) 在 PM 上截取 $PN=BA=2$，连接 CN，过 C 作 $CH//BA$ 交 BM 于 H，连接 PF，如图所示. 由(2)可知$\angle BAP=\angle CPN$. 在$\triangle BAP$ 和$\triangle NPC$ 中，



$$\begin{cases}AB=PN,\\ \angle BAP=\angle NPC,\\ PA=CP,\end{cases}$$

∴ $\triangle BAP\cong\triangle NPC$（SAS），∴ $BP=CN$，$\angle CNP=\angle B=60°$. ∵ $CH//BA$，∴ $\angle CHN=\angle B=60°$，∴ $\angle CNH=\angle CHN=\angle HCN=60°$，∴ $\triangle CHN$ 为等边三角形，∴ $CN=CH=HN=BP$. 由(2)可知 $CF//BM$，∴ 四边形 $BHCF$ 为平行四边形，∴ $BH=CF$，$CH=BF$，∴ $HN=CH=BF=BP$. ∵ $PN=PH+HN$，$HN=BP$，∴ $PN=PH+BP=BH=CF=2$. 由（1）可知 $\triangle AEP\cong\triangle CEP$，∴ $AE=CE$. ∵ $\triangle AEF$ 的周长为 3，∴ $AE+EF+AF=3$，即 $CE+EF+AF=3$，∴ $CF+AF=3$. ∵ $CF=2$，∴ $AF=1$. ∵ $BA=2$，∴ $BF=BA-AF=1$，∴ $BF=AF=BP=1$，∴ $\triangle BPF$ 为等边三角形，∴ $BF=BP=PF=AF=1$，$\angle BFP=\angle BPF=60°$，∴ $\angle FAP=\angle FPA$. ∵ $\angle BFP=\angle FAP+\angle FPA$，∴ $\angle FAP=\angle FPA=30°$，∴ $\angle BPA=\angle BPF+\angle FPA=90°$. 在 Rt$\triangle BPA$ 中，$AB=2$，$BP=1$，由勾股定理得 $PA=\sqrt{BA^2-BP^2}=\sqrt{3}$，∴ 菱形 $APCD$ 的周长$=4PA=4\sqrt{3}$.

课时 2　菱形的判定

刷基础

1. C 【解析】∵ 四边形是平行四边形，∴ 对角线互相平分，故 A 不一定是菱形；∵ 四边形是平行四边形，∴ 对边相等，故 B 不一定是菱形；∵ 四边形是平行四边形，∴ 对边平行，故 D 不一定是菱形；C 选项中，根据三角形的内角和定理可得 $180°-70°-55°=55°$，∴ 由等角对等边可知四边形邻边相等. 又∵ 四边形是平行四边形，∴ C 是菱形，故 C 符合题意. 故选 C.

2.【证明】∵ D，E 分别为 BC，AC 的中点，∴ $BC=2BD$，DE 是$\triangle ABC$ 的中位线，∴ $DE//AB$. 又∵ $AF//BC$，∴ 四边形 $ABDF$ 是平行四边形. ∵ $BC=2AB$，∴ $AB=BD$，∴ 平行四边形 $ABDF$ 是菱形.

3. C 【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ 当 $AC\perp BD$ 时，根据对角线互相垂直的平行四边形是菱形，可得▱$ABCD$ 是菱形，故 A 选项不符合题意；当 $AB=BC$ 时，根据有一组邻边相等的平行四边形是菱形，可得▱$ABCD$

是菱形，故 B 选项不符合题意；当 $\angle DAC=\angle BAC$ 时，易知 $\angle BAC=\angle ACD$，$\therefore \angle ACD=\angle DAC$，$\therefore AD=DC$，根据有一组邻边相等的平行四边形是菱形，可得▱$ABCD$ 是菱形，故 D 选项不符合题意；由 $AC=BD$ 不能判定▱$ABCD$ 是菱形，故 C 选项符合题意. 故选 C.

4.【证明】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

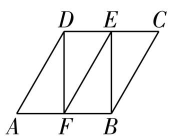
$\therefore OA=\frac{1}{2}AC=12, OB=\frac{1}{2}BD=5.$

$\because OA^2+OB^2=12^2+5^2=169, AB^2=13^2=169$，

$\therefore OA^2+OB^2=AB^2$，$\therefore \angle AOB=90°$，

$\therefore AC\perp BD$，$\therefore$ ▱$ABCD$ 是菱形.

5. D 【解析】四个全等的含 30° 角的直角三角板拼成的三个图案中，第一个与第三个四边形的四条边长都等于直角三角板的斜边长，$\therefore$ 第一个与第三个图案是菱形. 如图，在第二个图案中，由题可知 $AD=BC=EF$，$CD=AB$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形. $\because \angle ADF=\angle FEB=30°$，$\angle AFD=\angle FBE=90°$，$\therefore AF=\frac{1}{2}AD$，$BF=\frac{1}{2}EF$，$\therefore AF+BF=\frac{1}{2}(AD+EF)=\frac{1}{2}\times 2AD=AD$，$\therefore AB=AD$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形. 故选 D.



6.【证明】$\because AC$ 是 BD 的垂直平分线，$\therefore AB=AD$，$BC=CD$，$\therefore \angle ABD=\angle ADB$，$\angle BAF=\angle DAF$.

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle ADF$ 中，$\begin{cases}AB=AD,\\ \angle BAF=\angle DAF,\\ AF=AF,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABF\cong\triangle ADF$（SAS），$\therefore \angle ABF=\angle ADF$.

$\because \angle BEC=\angle ADF$，$\therefore \angle BEC=\angle ABF$，$\therefore AB/\!/CD$，$\therefore \angle BAC=\angle ACD$. 又$\because \angle BAC=\angle DAC$，$\therefore \angle CAD=\angle ACD$，$\therefore AD=CD$. $\because AB=AD$，$BC=CD$，$\therefore AB=CB=CD=AD$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

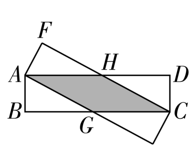
刷易错

7.【解】赞成小洁的说法. 补充条件：$OA=OC$（条件不唯一）. 证明如下：$\because OA=OC$，$OB=OD$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 又$\because AC\perp BD$，$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形.

刷提升

1. C 【解析】设 BC 交 AE 于 G，AD 交 CF 于 H，如图所示. $\because$ 四边形 $ABCD$、四边形 $AECF$ 是全等的长方形，$\therefore AB=CE$，$\angle B=\angle E=90°$，$AD/\!/BC$，$AE/\!/CF$，$\therefore$ 四边形 $AGCH$ 是平行四边形. 在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle CEG$ 中，$\begin{cases}\angle B=\angle E,\\ \angle AGB=\angle CGE,\\ AB=CE,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABG\cong\triangle CEG$（AAS），$\therefore AG=CG$，$\therefore$ 四边形 $AGCH$ 是菱形. 设 $AG=CG=x$，则 $BG=BC-CG=8-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABG$ 中，$AB^2+BG^2=AG^2$，$\therefore 2^2+(8-x)^2=x^2$，解得 $x=\frac{17}{4}$，$\therefore CG=\frac{17}{4}$，$\therefore$ 菱形 $AGCH$ 的面积 $=CG\times AB=\frac{17}{4}\times 2=\frac{17}{2}$，即图中重叠（阴影）部分的面积为 $\frac{17}{2}$，故选 C.



关键点拨 由勾股定理求出 CG 的长是解题的关键.

易错警示 判定一个图形是菱形时，先看它的前提条件，若是四边形，则证四条边都相等，或者先证明它是平行四边形；若是平行四边形，则需要证明一组邻边相等或对角线互相垂直.

2. C 【解析】A 选项，根据作图可知 $OA=OC$，$AE=CE$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AB/\!/CD$，$\therefore \angle CEO=\angle AFO$，$\angle ECO=\angle FAO$.

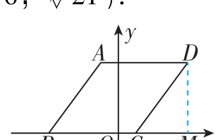
在 $\triangle CEO$ 和 $\triangle AFO$ 中，$\begin{cases}\angle CEO=\angle AFO,\\ \angle ECO=\angle FAO,\\ OC=OA,\end{cases}$

$\therefore \triangle CEO\cong\triangle AFO$（AAS），$\therefore CE=AF$，$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 为平行四边形. $\because AE=CE$，$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 为菱形，故 A 不符合题意. B 选项，由作图可得 $\angle ADE=\angle FDE=\frac{1}{2}\angle ADC$，$\angle DAF=\angle BAF=\frac{1}{2}\angle DAE$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AB/\!/CD$，$\therefore \angle DFA=\angle BAF$，$\therefore \angle DAF=\angle DFA$，$\therefore DA=DF$，同理可得 $AD=AE$，$\therefore DF=AE$，而 $AB/\!/CD$，$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 为平行四边形. $\because DA=DF$，$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 为菱形，故 B 不符合题意. D 选项，由折叠可得 $AD=AE$，$FD=FE$，易得 $DA=DF$，$\therefore AD=AE=EF=DF$，$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 为菱形，故 D 不符合题意. 无法证明 C 选项中的四边形 $BEDF$ 为菱形，故 C 符合题意. 故选 C.

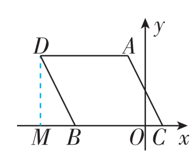
易错警示 字母 a，m 可正可负，因此菱形在平面直角坐标系中的位置不定，所以需分情况讨论.

3. $(4,4)$ 或 $(4,-4)$ 或 $(-6,\sqrt{21})$ 或 $(-6,-\sqrt{21})$

【解析】①点 D 在点 A 的右边时，过 D 作 $DM\perp BC$ 交 BC 的延长线于 M，如图(1)所示. $\because A(-1,m)$，$B(-4,0)$，$C(1,0)$，$D(a,m)$，$\therefore AD/\!/BC$，$OB=4$，$OC=1$，$\therefore BC=1+4=5$. 当 $AB=AD=CD=BC=5$ 时，四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore OM=5-1=4$，$\therefore CM=OM-OC=3$，$\therefore DM=\sqrt{CD^2-CM^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(4,4)$ 或 $(4,-4)$. ②点 D 在点 A 的左边时，过 D 作 $DM\perp CB$ 交 CB 的延长线于 M，如图(2)所示. $\because A(-1,m)$，$B(-4,0)$，$C(1,0)$，$D(a,m)$，$\therefore AD/\!/BC$，$OB=4$，$OC=1$，$\therefore BC=1+4=5$. 当 $AD=AC=BC=BD=5$ 时，四边形 $ACBD$ 是菱形，$\therefore OM=5+1=6$，$\therefore BM=OM-OB=2$，$\therefore DM=\sqrt{BD^2-BM^2}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$，$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(-6,\sqrt{21})$ 或 $(-6,-\sqrt{21})$. 故答案为 $(4,4)$ 或 $(4,-4)$ 或 $(-6,\sqrt{21})$ 或 $(-6,-\sqrt{21})$.

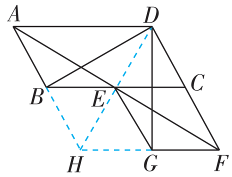


图(1)



图(2)

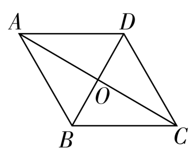
4. 60° 【解析】延长 AB,FG 交于 H，连接 HD，如图. 由题意得 $AD/\!/BC/\!/GF$，$AB/\!/DF$，∴ 四边形 $AHFD$ 为平行四边形. ∵ $\angle ABC=120°$，AF 平分 $\angle BAD$，∴ $\angle BAF=\angle DAF=\frac{1}{2}\times(180°-120°)=30°$，$\angle ADC=120°$，∴ $\angle DFA=30°=\angle DAF$，∴ $AD=DF$，∴ 平行四边形 $AHFD$ 为菱形，∴ 易得 $\triangle ADH$，$\triangle FHD$ 均为等边三角形，∴ $DH=DF$，$\angle BHD=\angle GFD=60°$. ∵ $AD/\!/EC$，∴ $\angle CEF=\angle DAF=\angle DFA=30°$，∴ $CE=CF$. 又∵ 四边形 $ECFG$ 为平行四边形，∴ $FG=CE$，∴ $GF=CF$. 易知 $CF=BH$，∴ $BH=GF$. 在 $\triangle BHD$ 与 $\triangle GFD$ 中，$\begin{cases}DH=DF,\\ \angle BHD=\angle GFD,\\ BH=GF,\end{cases}$ ∴ $\triangle BHD\cong\triangle GFD$(SAS)，∴ $\angle BDH=\angle GDF$，∴ $\angle BDG=\angle BDH+\angle HDG=\angle GDF+\angle HDG=60°$. 故答案为 60°.



关键点拨 延长 AB，FG 交于 H，连接 HD，证明四边形 $AHFD$ 为菱形，得出 $\triangle ADH$，$\triangle DHF$ 为等边三角形，再证明 $\triangle BHD\cong\triangle GFD$，得到 $\angle BDH=\angle GDF$ 即可推出 $\angle BDG$ 的度数.

刷素养

5. (1)【解】已知：如图，四边形 $ABCD$ 的两条对角线互相垂直，即 $AC\perp BD$，且 $AB=BC=CD$.



求证：四边形 $ABCD$ 是菱形.

证明：∵ $AC\perp BD$，∴ $\angle BOA=\angle BOC=90°$.

在 Rt$\triangle BOA$ 和 Rt$\triangle BOC$ 中，$\begin{cases}AB=CB,\\ OB=OB,\end{cases}$

∴ Rt$\triangle AOB\cong$Rt$\triangle COB$(HL)，∴ $OA=OC$. 同理可得 Rt$\triangle COD\cong$Rt$\triangle COB$(HL)，∴ $OD=OB$，∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形. ∵ $AC\perp BD$，∴ 四边形 $ABCD$ 是菱形，∴ 有三条边相等的"垂美四边形"是菱形.

归纳总结 菱形面积的求法：①菱形面积等于底乘高；②菱形面积等于对角线乘积的一半.

(2)【解】在题图(1)中，∵ $S=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot BO+\frac{1}{2}AC\cdot DO=\frac{1}{2}AC\cdot BD$，∴ $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD$.

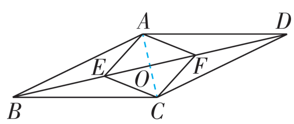
刷有所得 对角线互相垂直的四边形的面积等于其对角线的乘积的一半.

(3)【证明】连接 CD,AD. 由已知可得 $\angle BCA=\angle EDB$. ∵ $\angle CBO+\angle EDB=90°$，∴ $\angle CBO+\angle BCA=90°$，∴ $\angle COB=90°$，∴ $AC\perp BD$，∴ 四边形 $ABCD$ 是"垂美四边形". 由(2)可得 $S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}z^2$. ∵ $\angle BED=\angle ABC=90°$，∴ 易知四边形 $ABED$ 为直角梯形. ∵ $S_{四边形ABCD}=S_{梯形ABED}-S_{\triangle CED}=(x+y)\times y\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times x\times(y-x)=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2$，∴ $\frac{1}{2}z^2=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2$，即 $z^2=y^2+x^2$，即勾股定理得证.

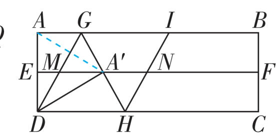
课时 3 菱形的性质与判定的综合应用

刷提升

1. C 【解析】如图，连接 AC 交 BD 于点 O. ∵ 四边形 $AECF$ 是菱形，∴ $AC\perp BD$，$AO=OC$，$EO=OF$. 又∵ 点 E,F 为线段 BD 的两个三等分点，∴ $BE=FD$，∴ $BO=OD$. ∵ $AO=OC$，∴ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形. ∵ $AC\perp BD$，∴ 四边形 $ABCD$ 为菱形. ∵ 四边形 $AECF$ 为菱形，且周长为 20，∴ $AE=5$. ∵ $BD=24$，点 E,F 为线段 BD 的两个三等分点，∴ $EF=8$，∴ $OE=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}\times8=4$. 由勾股定理得，$AO=\sqrt{AE^2-OE^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，∴ $AC=2AO=2\times3=6$，∴ $S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}BD\cdot AC=\frac{1}{2}\times24\times6=72$. 故选 C.



(第 1 题图)



(第 2 题图)

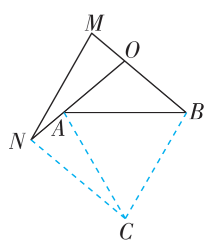
2. C 【解析】如图，连接 AA'. ∵ 对折长方形纸片 $ABCD$，使 AB 与 DC 重合，得到折痕 EF，点 A' 恰好在折痕 EF 上，∴ $AA'=DA'$，$EF/\!/AB/\!/CD$，$EF\perp AD$. ∵ 将 $\triangle ADG$ 沿 DG 再次翻折得到 $\triangle A'DG$，∴ $AD=A'D$，$\angle ADG=\angle A'DG$，$\angle DA'G=\angle DAG=90°$，∴ $AA'=AD=A'D$，∴ $\triangle ADA'$ 是等边三角形，∴ $\angle ADA'=60°$，∴ $\angle ADG=\angle A'DG=30°$，∴ $A'G=\frac{1}{2}DG$. ∵ $EF/\!/CD$，∴ $\angle A'DH=\angle EA'D=90°-60°=30°$，$\angle GDH=\angle GMA'=90°-30°=60°$，∴ $\angle GA'M=\angle DA'G-\angle EA'D=60°$，∴ $\angle DGH=180°-60°-60°=60°$，∴ $\triangle GMA'$ 是等边三角形，∴ $A'M=A'G=GM$，∴ $A'M=\frac{1}{2}DG$，故①正确. 在 Rt$\triangle DEM$ 中，$\angle EDM=30°$，∴ $DM=2EM$. ∵ $A'M=GM=\frac{1}{2}DG$，∴ $DM=GM$，∴ $GM=2EM$，故②正确. ∵ $AB/\!/CD$，$HI/\!/GD$，∴ 四边形 $DHIG$ 是平行四边形. ∵ $EF/\!/CD$，∴ $\angle GHD=\angle GA'M=60°$. 又∵ $\angle DGH=60°$，$\angle GDH=60°$，∴ $\triangle GDH$ 是等边三角形，∴ $DG=DH$，∴ 四边形 $DHIG$ 是菱形. 又∵ 在 Rt$\triangle ADG$ 中，$\angle ADG=30°$，∴ $DG=2AG$，∴ $GI=DG=2AG$. ∵ $AI=6$，∴ $AG=2$，$DG=GI=4$，∴ $AD=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}$，故③正确. 易知 A' 为 GH 的中点，∴ $S_{\triangle DGA'}=S_{\triangle DA'H}=S_{\triangle ADG}$. ∵ $HI/\!/DG$，$GI/\!/DH$，∴ $\angle HGI=\angle GHD=\angle DGH=\angle GHI=60°$，∴ $\angle GIH=60°$，∴ $\triangle GHI$ 是等边三角形. 易得 $S_{\triangle GHI}=S_{\triangle DGH}$，∴ $S_{\triangle ADG}=$

$\frac{1}{2}S_{\triangle DGH}=\frac{1}{2}S_{\triangle GHI}$，∴ $S_{\triangle ADG}=\frac{1}{5}S_{梯形ADHI}$. ∵ I 为 GB 中点，$AB=CD$，∴ 易得 $IB=IG=GH=DH$，∴ $AI=HC$，∴ $S_{梯形BCHI}=S_{梯形ADHI}=5S_{\triangle ADG}$，故④错误. 故选 C.

3. $\frac{1}{2^{2\,021}}$ 【解析】∵ 点 D,E 分别为 AC,BC 边的中点，∴ DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，∴ $DE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}$，$AD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}$，$DE/\!/AF$，∴ $DE=AD$. ∵ $EF/\!/AC$，∴ 四边形 $EDAF$ 是平行四边形. 又∵ $DE=AD$，∴ 四边形 $EDAF$ 是菱形，∴ $C_1=4\times\frac{1}{2}=2$. 同理求得 $C_2=4\times\frac{1}{2^2}=1$，…，$C_n=4\times\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-2}}$（$n$ 为正整数），∴ $C_{2\,023}=\frac{1}{2^{2\,023-2}}=\frac{1}{2^{2\,021}}$. 故答案为 $\frac{1}{2^{2\,021}}$.

关键点拨 掌握三角形中位线定理及菱形的性质与判定定理是解题关键.

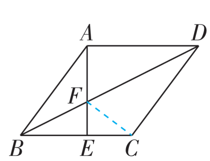
4. 80 【解析】过点 B 作 $BC/\!/MN$，且使 $BC=MN$，连接 CN,AC，如图，则四边形 $MNCB$ 是平行四边形. ∵ $BM=MN$，∴ 四边形 $MNCB$ 是菱形，∴ $BM/\!/CN$，$BM=BC=MN=CN$. ∵ $BM=ON$，$OA=OB$，∴ $BM-OB=ON-OA$，∴ $OM=AN$. 设 $\angle OAB=x°$.



∵ $OA=OB$，∴ $\angle OAB=\angle OBA=x°$. ∵ $\angle MON$ 是 $\triangle AOB$ 的一个外角，∴ $\angle MON=\angle OAB+\angle OBA=2x°$. ∵ $MN=ON$，∴ $\angle M=\angle MON=2x°$. ∵ $BM/\!/CN$，∴ $\angle ANC=\angle MON=2x°$，∴ $\angle M=\angle ANC$，∴ $\triangle MNO\cong\triangle NCA$（SAS），∴ $AC=NO$. ∵ $ON=BM=MN=AB$，∴ $AC=AB=BC=CN$，∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形，∴ $\angle BAC=60°$. ∵ $CA=CN$，∴ $\angle ANC=\angle CAN=2x°$. ∵ $\angle OAB+\angle BAC+\angle CAN=180°$，∴ $x+60+2x=180$，解得 $x=40$，∴ $\angle BMN=2x°=80°$. 故答案为 80.

5. (1)【证明】∵ $\triangle ABD$ 与 $\triangle CBD$ 关于 BD 对称，∴ $AB=BC$，$AD=CD$，$\angle ABD=\angle CBD$. ∵ $AD/\!/BC$，∴ $\angle ADB=\angle CBD$，∴ $\angle ADB=\angle ABD$，∴ $AB=AD$，∴ $AB=AD=CD=BC$，∴ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2)【解】连接 CF，如图所示. ∵ $\triangle ABD$ 与 $\triangle CBD$ 关于 BD 对称，∴ $AF=FC=5$. ∵ $AE\perp BC$，$EF=3$，



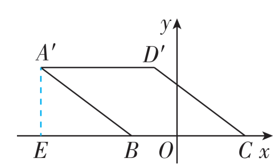
∴ $CE=\sqrt{CF^2-EF^2}=4$. 设 $BE=x$，则 $AB=BC=4+x$. ∵ $AF=5$，$EF=3$，∴ $AE=8$. ∵ $AB^2=AE^2+BE^2$，∴ $(x+4)^2=8^2+x^2$，解得 $x=6$，∴ $AB=BC=6+4=10$，∴ 四边形 $ABCD$ 的面积为 $10\times8=80$.

思路分析 (2) 连接 CF，根据题意得出 $AF=FC=5$，则 $AE=8$，由勾股定理得出 $CE=4$，设 $BE=x$，根据勾股定理求出 x 的值，即可得 $AB=BC=10$，再由菱形的面积公式求解即可.

刷素养

6.【解】(1) 由题意得 $CB=3-(-2)=3+2=5$，$CO=3$，∴ $AB=BC=CD=AD=5$. 在 Rt$\triangle CDO$ 中，由勾股定理得 $OD=\sqrt{CD^2-CO^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$. ∵ $AB=BC=CD=AD$，∴ 四边形 $ABCD$ 为菱形，∴ $AD/\!/BC$，即 AD 平行于 x 轴，∴ 点 A 的坐标为 $(-5,4)$.

(2) 过点 A' 作 $A'E\perp x$ 轴于点 E，如图，则 $\angle A'EB=90°$. ∵ 把木条 AD 向下压 1 个单位得到 $A'D'$，∴ $A'E=4-1=3$. 在 Rt$\triangle A'BE$ 中，由勾股定理得 $BE=\sqrt{A'B^2-A'E^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，∴ $OE=2+4=6$，∴ $A'(-6,3)$. ∵ $A'D'=5$，∴ 点 D' 的坐标为 $(-6+5,3)$，即 $D'(-1,3)$. 设过点 B,D' 的直线的表达式为 $y=kx+b(k\neq0)$，把点 B，点 D' 的坐标代入得 $\begin{cases}-2k+b=0,\\-k+b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=3,\\b=6,\end{cases}$ ∴ 过点 B,D' 的直线的表达式为 $y=3x+6$.



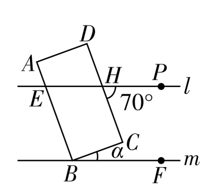
(3) ∵ $AB=BC=CD=AD$，∴ 四边形 $ABCD$ 为菱形，∴ $AC\perp BD$，$AB/\!/CD$，$CQ=AQ=\frac{1}{2}AC$，$BQ=DQ=\frac{1}{2}BD$，∴ $\angle DCE=\angle BEC$. ∵ 点 E,F 分别在 AB,AD 边上，$EF/\!/BD$，EC 平分 $\angle BEF$，∴ $\angle CEF=\angle CEB$，$\angle CGD=\angle CEF$，∴ $\angle DCG=\angle DGC$，∴ $DG=DC=5$. ∵ $CQ=2GQ=4$，∴ $GQ=2$，$AC=2CQ=2\times4=8$，∴ $DQ=5-2=3$，∴ $BD=2DQ=2\times3=6$，∴ $S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}\times6\times8=24$.

2 矩形的性质与判定

课时 1 矩形的性质

刷基础

1. B 【解析】设直线 l 交 AB 于点 E，交 CD 于点 H，如图所示. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $AB/\!/CD$，$\angle ABC=90°$，∴ $\angle HEB=\angle PHC=70°$. ∵ $\angle CBF=\alpha$，∴ $\angle ABF=\angle ABC+\angle CBF=90°+$



α. ∵ $l/\!/m$, ∴ $\angle HEB+\angle ABF=180°$, ∴ $70°+90°+\alpha=180°$, ∴ $\alpha=20°$. 故选 B.

2. C 【解析】∵ 矩形 $ABCD$ 是中心对称图形，对称中心是对角线 AC 与 BD 的交点 O，∴ $OB=OD$，$EO=FO$. 又∵ $\angle BOE=\angle DOF$，∴ $\triangle BOE\cong\triangle DOF$（SAS），∴ $S_{\triangle EOB}=S_{\triangle FOD}$，∴ $S_{阴影}=S_{\triangle AOB}=\frac{1}{4}AB\cdot BC=\frac{1}{4}\times6\times8=12$，故选 C.

3. A 【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AD=BC$，$AD/\!/BC$. ∵ $BF=DE$，∴ $AE=CF$. 又 ∵ $AE/\!/CF$，∴ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形. ∵ $CE\perp AD$ 于点 E，∴ $\angle AEC=90°$，∴ 四边形 $AFCE$ 是矩形，∴ $AF=CE$，$\angle AFC=90°$，∴ $AF\perp BC$，故 B、C、D 不符合题意；根据已知条件无法证明 $CF=DE$，故 A 符合题意. 故选 A.

4. $\sqrt{5}$ 【解析】连接 OB. ∵ 点 B 坐标是 $(-1,2)$，∴ $OB=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$. ∵ 四边形 $OABC$ 是矩形，∴ $AC=OB=\sqrt{5}$. 故答案为 $\sqrt{5}$.

关键点拨 根据矩形性质将求 AC 的长转换为求 OB 的长即可得解.

5. (1)【证明】∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $AD/\!/BC$，$AD=BC$. ∵ 点 E 在 BC 的延长线上，∴ $AD/\!/CE$. 又∵ $AC/\!/DE$，∴ 四边形 $ACED$ 是平行四边形，∴ $AD=CE$，∴ $BC=CE$.

(2)【解】∵ $DE/\!/AC$，$\angle E=40°$，∴ $\angle OCB=\angle E=40°$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $OB=OC$，∴ $\angle OBC=\angle OCB=40°$，∴ $\angle BOC=180°-\angle OBC-\angle OCB=180°-40°-40°=100°$.

6. C 【解析】∵ $OA=12$ m，$OB=5$ m，∴ $AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$(m)，∴ $A'B'=AB=13$ m. 连接 OM'. ∵ M' 为 $A'B'$ 的中点，$\triangle A'OB'$ 是直角三角形，∴ $OM'=\frac{1}{2}A'B'=6.5$ m. 故选 C.

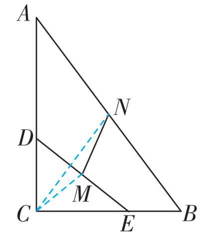
7. D 【解析】由条件可知 $\angle C=90°-55°=35°$，$DE=CE=\frac{1}{2}AC$，∴ $\angle EDC=\angle C=35°$，∴ $\angle AED=\angle EDC+\angle C=35°+35°=70°$，故选 D.

8. B

添加辅助线

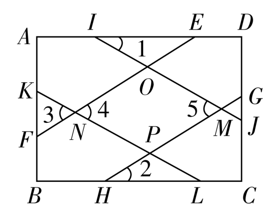
已知直角三角形及斜边中点，则构造斜边上的中线.

【解析】如图，连接 CM，CN. ∵ $DE=4$，$AB=10$，点 M，N 分别是 DE，AB 的中点，∴ $CN=\frac{1}{2}AB=5$，$CM=\frac{1}{2}DE=2$. 当 C，M，N 在同一直线上时，MN 取得最小值，∴ MN 的最小值为 $5-2=3$. 故选 B.



刷提升

1. D 【解析】如图. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $\angle C=\angle D=90°$，∴ $\angle1+\angle MJG=90°$，$\angle2+\angle MGJ=90°$. ∵ $\angle1=\angle2=30°$，∴ $\angle MJG=\angle MGJ=60°$，∴ $\angle GMJ=180°-\angle MJG-\angle MGJ=60°$，∴ $\angle5=60°$. ∵ $IJ/\!/KL$，$EF/\!/GH$，∴ 四边形 $NPMO$ 是平行四边形，∴ $\angle4=\angle5=60°$，∴ $\angle3=\angle4=60°$. 故选 D.



2. B 【解析】∵ 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$\angle ABC=\angle BCD=90°$，∴ $\angle BCE=90°$，$CD=AB=3$. ∵ $CE=DC$，∴ $CE=3$. ∵ $\angle ACB=30°$，$AB=3$，∴ $AC=2AB=6$，$\angle OCD=60°$，∴ $OA=OC=CE=3$，∴ $\triangle OCE$ 是等腰三角形. ∵ $\angle OCE=\angle ACB+\angle BCE=120°$，∴ $\angle E=\angle COE=\frac{1}{2}(180°-\angle OCE)=30°$. 在 Rt$\triangle CEF$ 中，$\angle E=30°$，∴ $2CF=EF$，∴ $CF^2+CE^2=EF^2=4CF^2$，∴ $3CF^2=9$，∴ $CF=\sqrt{3}$. 故选 B.

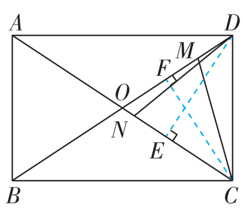
关键点拨 解答本题的关键是求出 AP_1，AP_2，AP_3 的长度，从而得出 AP_n 的长度.

3. B 【解析】∵ $\triangle ABC$ 是直角三角形，$AB=3$，$AC=4$，∴ $BC=5$. ∵ AD 为斜边 BC 上的中线，∴ $AD=\frac{1}{2}BC=\frac{5}{2}$. 第 1 次折叠：$AP_1=\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$，第 2 次折叠：$AP_2=\left(\frac{5}{4}+\frac{5}{8}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{15}{16}=\frac{5\times3}{4^2}$，第 3 次折叠：$AP_3=\left(\frac{15}{16}+\frac{15}{32}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{45}{64}=\frac{5\times3^2}{4^3}$，∴ 归纳可得第 n 次折叠：$AP_n=\frac{5\times3^{n-1}}{4^n}$，∴ $AP_{2\,024}=\frac{5\times3^{2\,024-1}}{4^{2\,024}}=\frac{5\times3^{2\,023}}{4^{2\,024}}$，故选 B.

4. $\frac{24}{5}$ 【解析】连接 BD，AM. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $\angle BAD=\angle ADC=90°$，$AD=BC=4$，$S_{矩形ABCD}=AB\cdot BC=3\times4=12$. 由勾股定理得 $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$. ∵ $BC=4$，∴ $4\leqslant BM\leqslant5$. ∵ $\triangle ADM$ 和 $\triangle BDM$ 的边 DM 上的高

$AD=BC=4$，$DG\perp BM$，$\therefore S_{\triangle ADM}=S_{\triangle BDM}=\frac{1}{2}\times BM\cdot DG$. $\because S_{矩形ABCD}=S_{\triangle ABM}+S_{\triangle BCM}+S_{\triangle ADM}$，$\therefore S_{矩形ABCD}=\frac{1}{2}BM\cdot AE+\frac{1}{2}BM\cdot CF+\frac{1}{2}BM\cdot DG$，$\therefore S_{矩形ABCD}=\frac{1}{2}BM(AE+CF+DG)=12$，$\therefore BM\cdot m=24$. 当 $4\leqslant BM\leqslant 5$ 时，m 随着 BM 的增大而减小，$\therefore BM=5$ 时，m 的值最小，此时 $m=\frac{24}{5}$. 故答案为 $\frac{24}{5}$.

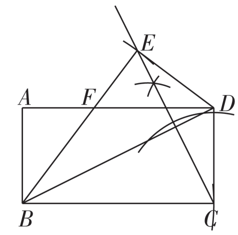
5. $\sqrt{37}$　【解析】过 D 作 $DE\perp OC$ 于 E，过 C 作 $CF\perp OD$ 于 F，如图. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore AC=BD$，$OD=\frac{1}{2}BD$，$OC=\frac{1}{2}AC$，$\therefore OD=OC$，$\therefore S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}OD\cdot CF=\frac{1}{2}OC\cdot DE$，$\therefore CF=DE$. $\because CM=DN$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle CMF\cong \mathrm{Rt}\triangle DNE(\mathrm{HL})$，$\therefore FM=NE$. 设 $FM=NE=x$，则 $DF=DM+FM=2+x$，$CE=CN-NE=6-x$. $\because CD=DC$，$DE=CF$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle CFD\cong \mathrm{Rt}\triangle DEC(\mathrm{HL})$，$\therefore DF=CE$，$\therefore 2+x=6-x$，$\therefore x=2$，$\therefore CE=4$. $\because CD=AB=7$，$\therefore DE^2=CD^2-CE^2=49-16=33$，$\therefore DN=\sqrt{DE^2+NE^2}=\sqrt{33+4}=\sqrt{37}$. 故答案为 $\sqrt{37}$.



关键点拨　过 D 作 $DE\perp OC$ 于 E，过 C 作 $CF\perp OD$ 于 F，根据矩形的性质、全等三角形的判定和性质、勾股定理等知识即可得到结论.

6. ①②③　【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，对角线 AC，BD 相交于点 O，$\therefore$ 点 O 为 BD 的中点. $\because EB=ED$，$\therefore OE\perp BD$，则①正确. 由题意知 $\angle DAE=90°$，$\angle BED=45°$，$\therefore \triangle ADE$ 为等腰直角三角形，$\therefore AD=AE$. $\because \angle EAF=\angle FOD=90°$，$\therefore \angle AEF+\angle EFA=\angle DFO+\angle FDO=90°$. $\because \angle EFA=\angle DFO$，$\therefore \angle AEF=\angle FDO$. 又 $\because \angle DAE=\angle DAB=90°$，$\therefore \triangle EAF\cong\triangle DAB(\mathrm{ASA})$，$\therefore AF=AB$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore DC=AB$，$\therefore AF=CD$，则②正确. 由②知 $EF=DB$，$\angle AEF=\angle ADB$. $\because$ 点 G 是线段 EF 的中点，$\therefore AG=EG=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}DB$，$\therefore \angle AEF=\angle GAE$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，对角线 AC，BD 相交于点 O，$\therefore AO=\frac{1}{2}DB=OD$，$\therefore \angle DAC=\angle ADB=\angle AEF=\angle GAE$，$AO=AG$. $\because \angle EAF=\angle EAG+\angle GAF=90°$，$\therefore \angle GAF+\angle DAC=90°$，$\therefore \triangle OAG$ 是等腰直角三角形，则③正确. 故答案为①②③.

7.【解】(1) 如图，$\triangle BED$ 即为所求作.（作法不唯一）



(2) 如图. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，
$\therefore \angle A=90°$，$AD=BC=2$，$AD/\!/BC$，
$\therefore \angle CBD=\angle ADB$.
由对称知 $\angle CBD=\angle EBD$，
$\therefore \angle EBD=\angle ADB$，$\therefore BF=DF$.
设 $AF=x$，则 $DF=2-x=BF$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中，根据勾股定理得 $AF^2+AB^2=BF^2$，$\therefore x^2+1^2=(2-x)^2$，
解得 $x=\frac{3}{4}$，$\therefore AF=\frac{3}{4}$.

刷素养

关键点拨　熟练掌握矩形的性质，以及全等三角形的判定与性质是解题的关键.

8. (1)【证明】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore OA=OC=\frac{1}{2}AC$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$，$AC=BD$，$\therefore OB=OC=OA=OD$. $\because BE=CE$，$OE=OE$，$\therefore \triangle BEO\cong\triangle CEO(\mathrm{SSS})$.

(2)【解】$\triangle DHE$，$\triangle CHO$，$\triangle DEG$，$\triangle BFO$ 都与 $\triangle AEF$ 的面积相等. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore \angle BAD=\angle CDA=90°$，$AB/\!/CD$，$AB=DC$. $\because BE=CE$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BAE\cong \mathrm{Rt}\triangle CDE(\mathrm{HL})$，$\therefore \angle AEB=\angle DEC$，$AE=DE$. $\because OA=OD$，$\therefore OE\perp AD$，$\therefore \angle OEA=\angle OED=90°$，$\therefore \angle BAD=\angle OED=90°$，$\angle ADC=\angle AEO=90°$，$\therefore AB/\!/OE$，$DC/\!/OE$，$\therefore S_{\triangle AEO}=S_{\triangle BEO}$，$S_{\triangle DEO}=S_{\triangle COE}$，$\therefore S_{\triangle AEO}-S_{\triangle EFO}=S_{\triangle BEO}-S_{\triangle EFO}$，$S_{\triangle DEO}-S_{\triangle EHO}=S_{\triangle COE}-S_{\triangle EHO}$，$\therefore S_{\triangle AEF}=S_{\triangle BFO}$，$S_{\triangle DHE}=S_{\triangle CHO}$. $\because OA=OD$，$\therefore \angle DAO=\angle ADO$，$\therefore \triangle AEF\cong\triangle DEH(\mathrm{ASA})$，$\therefore S_{\triangle AEF}=S_{\triangle BFO}=S_{\triangle DHE}=S_{\triangle CHO}$. $\because DG/\!/AC$，$\therefore \angle G=\angle AFE$，$\angle GDE=\angle FAE$，$\therefore \triangle AEF\cong\triangle DEG(\mathrm{AAS})$，$\therefore S_{\triangle AEF}=S_{\triangle DEG}$，$\therefore \triangle DHE$，$\triangle CHO$，$\triangle DEG$，$\triangle BFO$ 都与 $\triangle AEF$ 的面积相等.

微专题

[方法指导]

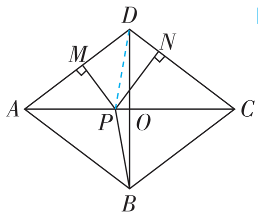
$\triangle OBC$ 的面积　$\frac{6}{\sqrt{10}}$

[针对训练]

1. C　【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore AD=BC=4$，$\angle BAD=90°$，$\therefore BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$. $\because S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}BD\times AF=\frac{1}{2}\times AB\times AD$，

$\therefore AF=\dfrac{AB\times AD}{BD}=\dfrac{3\times4}{5}=2.4$. 故选 C.

2. 7. 8 【解析】$\because AO=CO=4$, $BO=DO=3$, $\therefore AC=8$, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形. $\because AC\perp BD$ 于点 O, $\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形, $AD=\sqrt{AO^2+DO^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$, $\therefore CD=AD=5$. 连接 PD, 如图所示. $\because S_{\triangle ADP}+S_{\triangle CDP}=S_{\triangle ADC}$, $\therefore \dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot PM+\dfrac{1}{2}DC\cdot PN=\dfrac{1}{2}AC\cdot OD$, 即 $\dfrac{1}{2}\times5\times PM+\dfrac{1}{2}\times5\times PN=\dfrac{1}{2}\times8\times3$, $\therefore 5\times(PM+PN)=8\times3$, $\therefore PM+PN=4.8$, $\therefore$ 当 PB 最短时, $PM+PN+PB$ 有最小值. 由垂线段最短可知, 当 $BP\perp AC$ 时, PB 最短, $\therefore$ 当点 P 与点 O 重合时, $PM+PN+PB$ 有最小值, 最小值为 $4.8+3=7.8$, 故答案为 7.8.



▶思路分析

证得四边形 $ABCD$ 是菱形, 得 $CD=AD=5$, 连接 PD, 由三角形面积关系求出 $PM+PN=4.8$, 则当 PB 最短时, $PM+PN+PB$ 有最小值, 即当 $BP\perp AC$ 时, PB 最短, 进而得出答案.

课时 2　矩形的判定

刷基础

1. 【证明】$\because AE/\!/BC$, $AE=BD$, $\therefore$ 四边形 $AEBD$ 是平行四边形. $\because AB=AC$, D 是 BC 的中点, $\therefore AD\perp BC$, $\therefore \angle ADB=90^\circ$, $\therefore$ 四边形 $AEBD$ 是矩形.

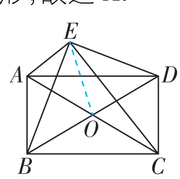
2. A

思路分析 | 矩形判定方法

平行四边形 $\begin{cases}\text{一个角是 }90^\circ\rightarrow\text{矩形}\\ \text{对角线相等}\rightarrow\text{矩形}\end{cases}$

【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore$ 当 $AC=BD$ 时, 四边形 $ABCD$ 是矩形, 故选 A.

3. 【证明】连接 OE, 如图.



$\because AB/\!/DC$, $AD/\!/BC$, $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore OA=OC$, $OB=OD$. $\because \angle AEC=\angle BED=90^\circ$, $\therefore OE=\dfrac{1}{2}AC$, $OE=\dfrac{1}{2}BD$, $\therefore AC=BD$, $\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是矩形.

4. (1)【证明】$\because \angle ABD=\angle CDB$, $\therefore AB/\!/CD$, $\therefore \angle BAE=\angle DCF$. $\because BE\perp AC$ 于点 E, $DF\perp AC$ 于点 F, $\therefore \angle AEB=\angle CFD=90^\circ$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中, $\begin{cases}\angle BAE=\angle DCF,\\ \angle AEB=\angle CFD,\\ BE=DF,\end{cases}$ $\therefore \triangle ABE\cong\triangle CDF(\text{AAS})$, $\therefore AB=CD$. 又 $\because AB/\!/CD$, $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

(2)【解】当 $\angle ABE=30^\circ$ 时, 四边形 $ABCD$ 是矩形. 理由如下: $\because AB=BO$, $BE\perp AO$, $\therefore \angle ABO=2\angle ABE=60^\circ$, $\therefore \triangle ABO$ 是等边三角形, $\therefore AO=BO$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AC=2AO$, $BD=2BO$, $\therefore AC=BD$, $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

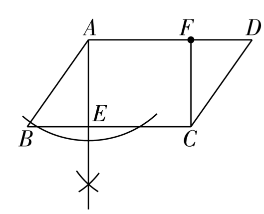
5. D 【解析】

A	利用对边平行且相等的四边形是平行四边形, 有一个角是直角的平行四边形是矩形可判定	不符合题意
B	利用对角线相等且互相平分的四边形是矩形可判定	不符合题意
C	利用有三个角是直角的四边形是矩形可判定	不符合题意
D	图形中只有两个角是直角, 不一定是矩形	符合题意

故选 D.

6. C 【解析】嘉嘉用刻度尺可以分别测量四边形的四条边长和两条对角线的长度, 如果四边形的两组对边的长度相等且两条对角线的长度相等, 即可判定这张纸片是矩形; 淇淇用量角器测量四边形的内角的度数, 如果有三个角是直角, 即可判定这张纸片是矩形. 故他们两人的工具都能用来判定这张纸片是矩形. 故选 C.

7. (1)【解】如图, AE 即为所作.



(2)【证明】如图, 由作图得 $\angle AEB=\angle AEC=90^\circ$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AD/\!/BC$, $AB=CD$, $\angle B=\angle D$, $\therefore \angle EAD+\angle AEC=180^\circ$, $\therefore \angle EAD=90^\circ$.

在 $\triangle CDF$ 和 $\triangle ABE$ 中, $\begin{cases}CD=AB,\\ \angle D=\angle B,\\ DF=BE,\end{cases}$

$\therefore \triangle CDF\cong\triangle ABE(\text{SAS})$, $\therefore \angle CFD=\angle AEB=90^\circ$, $\therefore \angle EAD=\angle AFC=\angle CFD=\angle AEC=90^\circ$, $\therefore$ 四边形 $AECF$ 是矩形.

思路分析◀

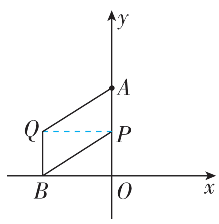
(2) 根据平行四边形的性质可得 $\angle EAD=90^\circ$, 根据 SAS 证明 $\triangle CDF\cong\triangle ABE$, 得到 $\angle CFD=\angle AEB=90^\circ$, 进而根据有三个角是直角的四边形是矩形证明四边形 $AECF$ 是矩形.

刷提升

1. C 【解析】由①$OA=OC$, $OB=OD$, 可得四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 再由②$AB/\!/CD$, $AD=BC$ 无法判定四边形 $ABCD$ 是矩形, 故选项 A 不符合题意. 由②$AB/\!/CD$, $AD=BC$; ③$AB=BC$

无法判定四边形 $ABCD$ 是矩形，故选项 B 不符合题意. 由①$OA=OC$，$OB=OD$，可得四边形 $ABCD$ 是平行四边形，再由④$AB\perp BC$，可得 $\angle ABC=90°$，$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是矩形，故选项 C 符合题意. 由①$OA=OC$，$OB=OD$，可得四边形 $ABCD$ 是平行四边形，再由③$AB=BC$，可得平行四边形 $ABCD$ 是菱形，故选项 D 不符合题意. 故选 C.

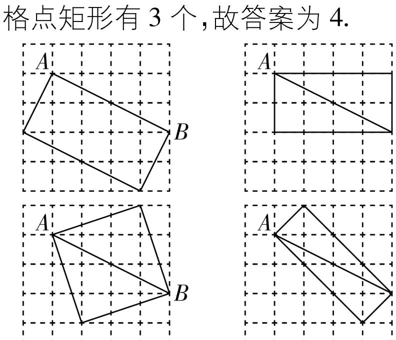
2. C 【解析】$\because$ 四边形 $APBQ$ 是平行四边形，$\therefore AP/\!/BQ$，$AP=BQ$，$\therefore PO/\!/BQ$. 如图，由端点分别在两条平行线上的所有线段中，垂直于平行线的线段最短可知，当 $QP\perp AO$ 时，PQ 最短. $\because QP\perp AO$，$\angle AOB=90°$，$\therefore \angle APQ=\angle AOB=90°$，$\therefore PQ/\!/BO$.



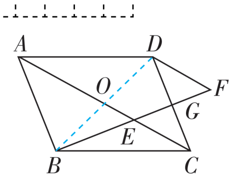
$\because PO/\!/BQ$，$PQ/\!/BO$，$\angle BOP=90°$，$\therefore$ 四边形 $POBQ$ 是矩形，$\therefore PQ=BO=6$，$BQ=OP=AP=4$，$\therefore Q(-6,4)$. 故选 C.

3. 3 【解析】设 AC 交 MN 于点 O. $\because MN$ 交 $\angle ACB$ 的平分线于点 E，交 $\angle ACD$ 的平分线于点 F，$\therefore \angle ACE=\angle BCE$，$\angle ACF=\angle DCF$，$\therefore \angle ACE+\angle ACF=\dfrac{1}{2}\times180°=90°$，$\therefore \angle ECF=90°$. $\because MN/\!/BC$，$\therefore \angle OEC=\angle BCE$，$\angle CFO=\angle DCF$，$\therefore \angle OEC=\angle ECO$，$\angle CFO=\angle OCF$，$\therefore EO=CO$，$FO=CO$，$\therefore OE=OF$. $\because AC=6$，$\therefore$ 当 $OC=3$，即 $AO=CO$ 时，四边形 $AECF$ 是平行四边形. $\because \angle ECF=90°$，$\therefore$ 平行四边形 $AECF$ 是矩形. $\because 3\div1=3$(秒)，$\therefore$ 当 MN 运动了 3 秒时，四边形 $AECF$ 是矩形. 故答案为 3.

4. 4 【解析】如图，共可以画出 4 个格点矩形：以 AB 为边的格点矩形有 1 个，以 AB 为对角线的格点矩形有 3 个，故答案为 4.



5. 【证明】(1) 连接 BD，交 AC 于点 O，如图所示.



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore BO=DO$.
$\because BE=EF$，$\therefore OE$ 是 $\triangle BDF$ 的中位线，
$\therefore OE/\!/DF$，即 $DF/\!/AC$.

思路分析 (2) 先证 $\triangle DFG\cong\triangle CEG$，得 $FG=EG$，则四边形 $CFDE$ 是平行四边形，再证 $CD=EF$，即可得出结论.

(2) 由 (1) 得 $DF/\!/AC$，$\therefore \angle DFG=\angle CEG$，$\angle GDF=\angle GCE$. $\because G$ 是 CD 的中点，$\therefore DG=CG$. 在 $\triangle DFG$ 和 $\triangle CEG$ 中，$\begin{cases}\angle DFG=\angle CEG,\\ \angle GDF=\angle GCE,\\ DG=CG,\end{cases}$

$\therefore \triangle DFG\cong\triangle CEG$(AAS)，
$\therefore FG=EG$，$\therefore$ 四边形 $CFDE$ 是平行四边形.
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AB=CD$.
$\because 2AB=BF$，$\therefore 2CD=BF$. 又 $\because EF=BE$，
$\therefore CD=EF$，$\therefore$ 平行四边形 $CFDE$ 是矩形.

刷素养

6. (1)【证明】$\because DE/\!/AC$，$\therefore \angle DEF=\angle EFC$. $\because \angle DEF=\angle A$，$\therefore \angle A=\angle EFC$，$\therefore EF/\!/AB$，$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 为平行四边形.

【解】(2) $\because$ 点 D 为 AB 中点，$\therefore AD=\dfrac{1}{2}AB$.

$\because DE/\!/AC$，点 D 为 AB 中点，$\therefore DE=\dfrac{1}{2}AC$.

$\because AB=AC$，$\therefore AD=DE$，$\therefore$ 平行四边形 $ADEF$ 为菱形. 故答案为菱形.

(3) 四边形 $AEGF$ 为矩形. 理由：如题图(2)，由 (1) 知，四边形 $ADEF$ 为平行四边形，$\therefore AF/\!/DE$ 且 $AF=DE$，$AD=EF$. $\because D$，E，G 共线，$EG=ED$，$\therefore AF/\!/EG$ 且 $AF=EG$，$\therefore$ 四边形 $AEGF$ 是平行四边形. $\because AD=AG$，$\therefore AG=EF$，$\therefore$ 平行四边形 $AEGF$ 为矩形.

课时 3　矩形的性质与判定的综合应用

刷提升

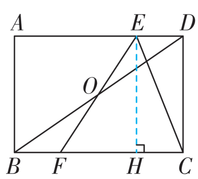
1. C 【解析】$\because AB=CD$，$AD=BC$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore OA=OC$，$OD=OB$. $\because OA=OD=5$，$\therefore AC=2OA=10$，$BD=2OD=10$，$\therefore AC=BD$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore \angle ABC=90°$. $\because AB=6$，$\therefore BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，$\therefore S_{四边形ABCD}=BC\cdot AB=8\times6=48$，故选 C.

易错警示 注意②中点 E 可以在 AB 上，也可以在 AD 上.

2. B 【解析】$\because OA=OB=OC=OD$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AC=BD$，$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是矩形，故①正确，符合题意. 当点 E 在 AB 上时，$\because O$，F 分别是 AC，CE 的中点，$\therefore OF$ 是 $\triangle ACE$ 的中位线，$\therefore OF=\dfrac{1}{2}AE$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore AB=CD$. $\because CD=4OF$，$\therefore AB=4OF=2AE$，$\therefore$ 点 E 是 AB 的中点；当点 E 在 AD 上时，同理可得 $AE=\dfrac{1}{2}AB$，但此时点 E 不是 AB 的中点，故②错误，不符合题意. 当点 E 与点 D 重合时，线段 OF 的长最大. $\because AD=$

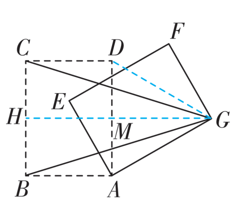
$BC=4$,$\therefore AE$ 的最大值是 4,$\therefore OF=\frac{1}{2}AE=2$,即线段 OF 长度的最大值是 2,故③正确,符合题意. 由②知 OF 是$\triangle ACE$ 的中位线,$\therefore$ 当$\angle COF=60°$时,$\angle OAB=60°$. $\because OA=OB$,$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形,$\therefore \angle OBA=60°$,$\therefore \angle FON=60°$. $\because \angle BEN>\angle OAB$,$\therefore \angle OFN\neq 60°$,$\therefore \triangle OFN$ 不是等边三角形,故④错误,不符合题意. 综上所述,其中正确的有 2 个. 故选 B.

3. $\frac{15}{4}$ 【解析】作 $EH\perp BC$ 于点 H,如图. $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,$BD=5$,$CD=3$,$\therefore AD=BC$,$\angle CDE=\angle BCD=90°$,$\therefore$ 四边形 $CDEH$ 为矩形,$BC=\sqrt{BD^2-CD^2}=4$,$\therefore EH=CD=3$,$ED=HC$. $\because BF=DE$,$CE=CF$,$\therefore$ 设 $CE=CF=x$,则 $BF=DE=4-x$. $\because CD^2+DE^2=CE^2$,$\therefore 3^2+(4-x)^2=x^2$,解得 $x=\frac{25}{8}$,$\therefore ED=HC=4-\frac{25}{8}=\frac{7}{8}$,$\therefore FH=CF-HC=\frac{9}{4}$,$\therefore EF=\sqrt{EH^2+FH^2}=\sqrt{3^2+\left(\frac{9}{4}\right)^2}=\frac{15}{4}$. 故答案为$\frac{15}{4}$.

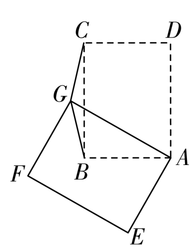


思路分析 作 $EH\perp BC$ 于点 H,证明四边形 $CDEH$ 为矩形,得到 $EH=CD=3$,$ED=HC$,利用勾股定理计算出 BC 的长,设 $CE=CF=x$,则 $BF=DE=4-x$,结合勾股定理建立方程求出 x 的值,进而求出 FH 的长,再利用勾股定理即可计算出 EF 的长.

4. $60°$或 $300°$ 【解析】分两种情况讨论:①如图(1),当点 G 在 AD 右侧时,取 BC 的中点 H,连接 GH 交 AD 于 M,连接 GD. 由旋转的性质得 $AD=AG$. $\because GC=GB$,$\therefore GH\perp BC$,$\therefore$ 易知四边形 $ABHM$ 是矩形,$\therefore AM=BH=\frac{1}{2}AD$,$\angle AMH=90°$,$\therefore GM$ 垂直平分 AD,$\therefore GD=GA=DA$,$\therefore \triangle ADG$ 是等边三角形,$\therefore \angle DAG=60°$,$\therefore$ 旋转角 $\theta=60°$;



图(1)



图(2)

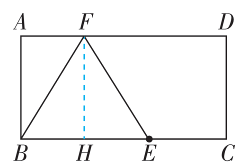
②如图(2),当点 G 在 AD 左侧时,同理可得$\angle DAG=60°$,$\therefore$ 旋转角 $\theta=360°-60°=300°$. 故答案为 $60°$或 $300°$.

关键点拨 当 $GB=GC$ 时,点 G 在 BC 的垂直平分线上,分两种情况讨论:点 G 在 AD 右侧和点 G 在 AD 左侧.

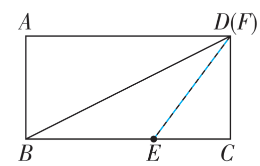
刷素养

5. (1)【证明】在矩形 $ABCD$ 中,$AB=2$,$BC=4$,$\therefore \angle A=\angle ABC=90°$,$AD\parallel BC$,$AD=BC=4$. $\because$ 点 F 是 AD 的中点,$\therefore AF=\frac{1}{2}AD=2$,$\therefore AB=AF$,$\therefore \angle ABF=\angle AFB=45°$,$\therefore \angle EBF=45°$. $\because$ 将矩形 $ABCD$ 沿着过点 E 的直线折叠,当点 B 落在边 AD(含端点)上时,落点记为 F,$\therefore EB=EF$,$\therefore \angle BFE=\angle EBF=45°$,$\therefore \angle BEF=90°$,$\therefore \triangle BEF$ 是等腰直角三角形.

【解】(2)补全图形如图(1)和图(2)所示. 由(1)可知 $EB=EF=2.5$. 在图(1)中,过 F 作 $FH\perp BC$ 于 H,则四边形 $ABHF$ 是矩形,$\therefore FH=AB=2$,$\therefore EH=\sqrt{EF^2-FH^2}=1.5$,$\therefore AF=BH=BE-EH=2.5-1.5=1$. 在图(2)中,连接 DE. 由题意得 $CD=AB=2$,$EC=BC-BE=1.5$,$DC^2+EC^2=DE^2$,$\therefore DE=2.5$,$\therefore DE=EF$,$\therefore$ 点 F 与点 D 重合,$\therefore AF=AD=4$. 综上所述,AF 的长为 1 或 4.

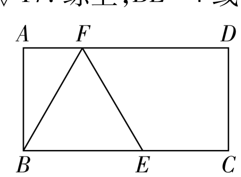


图(1)

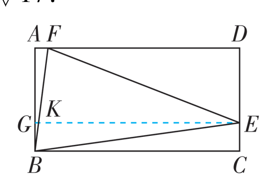


图(2)

(3)存在. ①当 E 在边 BC 上时,如图(3)所示,则 $S_{\triangle BEF}\leqslant \frac{1}{2}S_{\text{矩形}ABCD}$,即当 E 与 C 重合时,$\triangle BEF$ 面积最大,为 4,$\therefore BE=4$;②当 E 在边 CD 上时,如图(4)所示,过 E 作 $EG\parallel BC$ 交 AB 于点 G,交 BF 于 K. $\because S_{\triangle EKF}=\frac{1}{2}KE\cdot AG\leqslant\frac{1}{2}GE\cdot AG=\frac{1}{2}S_{\text{矩形}AGED}$,$S_{\triangle BKE}=\frac{1}{2}EK\cdot BG\leqslant\frac{1}{2}GE\cdot BG=\frac{1}{2}S_{\text{矩形}BCEG}$,$\therefore S_{\triangle BEF}\leqslant\frac{1}{2}S_{\text{矩形}ABCD}=4$,即当 E 为 CD 中点,F 与 A 重合时,$\triangle BEF$ 面积最大,为 4,$\therefore BE=\sqrt{BC^2+CE^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$. 综上,$BE=4$ 或 $\sqrt{17}$.



图(3)



图(4)

3 正方形的性质与判定

课时 1 正方形的性质

刷基础

1. B 【解析】由正方形的定义“有一组邻边相等的矩形叫做正方形”可知添加 $DC=AD$,能使矩形 $ABCD$ 成为正方形. 故选 B.

2. A 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

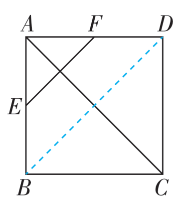
$\therefore \angle BAC=45°$. $\because AE=AB$, $\therefore \angle ABE=\frac{1}{2}\times(180°-45°)=67.5°$, $\therefore \angle CBE=90°-\angle ABE=90°-67.5°=22.5°$，故选 A.

3. C 【解析】连接 AC. $\because$ 四边形 $OABC$ 是正方形，$O(0,0)$，$B(2,0)$，$\therefore OB=2$，点 A，C 关于 x 轴对称，AC 所在直线为 OB 的垂直平分线，$\therefore A$，C 的横坐标均为 1. 根据正方形的对角线相等可得 $AC=BO=2$，$\therefore C$ 点纵坐标为 -1，$\therefore C$ 点坐标为 $(1,-1)$. 故选 C.

4. C 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore CD=BC$，$\angle BCD=90°$，$\therefore \angle BCG+\angle DCF=90°$. $\because DF\perp CE$，$BG\perp CE$，$\therefore \angle DFC=\angle CGB=90°$，$\therefore \angle CDF+\angle DCF=90°$，$\therefore \angle CDF=\angle BCG$. 在 $\triangle DCF$ 和 $\triangle CBG$ 中，$\begin{cases}\angle DFC=\angle CGB=90°,\\ \angle CDF=\angle BCG,\\ CD=BC,\end{cases}$

$\therefore \triangle DCF\cong\triangle CBG(\text{AAS})$，$\therefore DF=CG$，$CF=BG$，$\therefore FG=CG-CF=DF-BG$. $\because BG=3$，$DF=9$，$\therefore FG=DF-BG=9-3=6$. 故选 C.

5. 10 【解析】如图，连接 BD. 在正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，AD 的中点，$EF=5$，$\therefore EF$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线，$\therefore BD=2EF=10$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AC=BD=10$. 故答案为 10.



6. $\frac{9}{4}$ 【解析】$\because$ 正方形 $ABCD$ 边长为 3，$\therefore CD=CB=3$，$\angle BCD=90°$. 由题可知 $DC=DF$，$\therefore DF=3$. 设 $EF=EB=x$，则 $DE=3+x$，$CE=3-x$. 在直角三角形 CDE 中，由勾股定理得 $EC^2+CD^2=DE^2$，$\therefore (3-x)^2+3^2=(3+x)^2$，解得 $x=\frac{3}{4}$，$\therefore CE=3-x=3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$. 故答案为 $\frac{9}{4}$.

7. (1)【证明】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AD=CD$，$\angle ADP=\angle CDP=45°$.

在 $\triangle APD$ 和 $\triangle CPD$ 中，$\begin{cases}AD=CD,\\ \angle ADP=\angle CDP,\\ PD=PD,\end{cases}$

$\therefore \triangle APD\cong\triangle CPD(\text{SAS})$.

(2)【解】$\because \triangle APD\cong\triangle CPD$，$\therefore AP=PC$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore \angle BCD=90°$.

$\because PE\perp DC$，$PF\perp BC$，$\therefore \angle PEC=\angle PFC=90°$，

$\therefore$ 四边形 $PECF$ 是矩形，$\therefore PC=EF$，$\therefore AP=EF$. 在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中，$CF=3$，$CE=4$，$\therefore EF=\sqrt{CE^2+CF^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，$\therefore AP=EF=5$.

刷易错

易错警示 从已知条件不能确定 A，D，G 三点共线，即不能推出 $\angle GDC=90°$.

8. 【解】他的证明过程不正确. 正确证明过程如下：$\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $CEFG$ 都是正方形，$\therefore CB=CD$，$CE=CG$，$\angle BCD=\angle ECG=90°$，$\therefore \angle BCD-\angle ECD=\angle ECG-\angle ECD$，$\therefore \angle BCE=\angle GCD$，$\therefore \triangle BCE\cong\triangle DCG(\text{SAS})$.

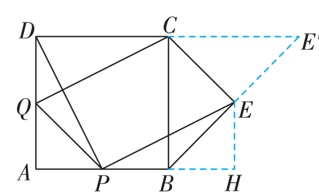
刷提升

1. C 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AD=BA$，$\angle DAF=\angle ABE=90°$. 在 $\triangle DAF$ 和 $\triangle ABE$ 中，$\begin{cases}AD=BA,\\ \angle DAF=\angle ABE,\\ AF=BE,\end{cases}$ $\therefore \triangle DAF\cong\triangle ABE(\text{SAS})$，$\therefore \angle ADF=\angle BAE$. $\because AE$ 平分 $\angle BAC$，四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore \angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC=22.5°$，$\angle ADC=90°$，$\therefore \angle ADF=22.5°$，$\therefore \angle CDF=\angle ADC-\angle ADF=90°-22.5°=67.5°$. 故选 C.

关键点拨 根据 AAS 证得 $\triangle AOB\cong\triangle DMA$ 是解决问题的关键.

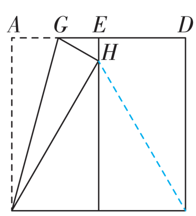
2. B 【解析】作 $DM\perp AE$. $\because D(-6,2)$，$\therefore OM=6$，$DM=2$. 将点 $D(-6,2)$ 代入 $y=kx+8$，解得 $k=1$，$\therefore y=x+8$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore \angle DAB=90°$，$AD=AB=CD=BC$，$\therefore \angle BAO+\angle DAM=90°$. $\because \angle ABO+\angle BAO=90°$，$\therefore \angle ABO=\angle DAM$. 又 $\because \angle AOB=\angle DMA=90°$，$AB=AD$，$\therefore \triangle AOB\cong\triangle DMA$，$\therefore OA=DM=2$，$\therefore AM=OB=4$，$\therefore$ 点 B 坐标为 $(0,4)$. 将点 B 向左平移 m 个单位后得到点 $(-m,4)$，将 $(-m,4)$ 代入 $y=x+8$，得 $4=-m+8$，解得 $m=4$. 故选 B.

3. B 【解析】如图，过点 E 作 $EH\perp AB$，交 AB 的延长线于点 H，延长 DC，BE 交于点 E'. $\because$ 四边形 $PECQ$ 是平行四边形，$\therefore QC=PE$，$QC\parallel PE$，$\angle PQC=\angle PEC$，$\therefore \angle BEP+\angle PQC=\angle BEP+\angle PEC=\angle BEC$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AD=CD=AB$，$\angle DAB=\angle CDA=90°$. $\because CQ\perp DP$，$\therefore \angle DCQ+\angle CDP=90°=\angle CDP+\angle ADP$，$\therefore \angle ADP=\angle DCQ$，$\therefore \triangle ADP\cong\triangle DCQ(\text{ASA})$，$\therefore CQ=DP$，$\therefore PE=DP$. $\because CQ\perp DP$，$QC\parallel PE$，$\therefore DP\perp PE$，$\therefore \angle APD+\angle EPH=90°=\angle APD+\angle ADP$，$\therefore \angle ADP=\angle EPH$. 又 $\because \angle DAP=\angle EHP=90°$，



$\therefore \triangle ADP \cong \triangle HPE$（AAS），$\therefore AP=EH$，$PH=AD$，$\therefore AD=AB=PH$，$\therefore BH=AP=EH$，$\therefore \angle EBH=45°$，$\therefore$ 点 E 在 $\angle CBH$ 的平分线上运动. $\because$ 易得 $\angle E'CB=90°$，$\angle CBE=45°$，$\therefore \angle E'=45°$. $\because$ 点 P 是线段 AB 上的一个动点（点 P 与点 A 不重合），$\therefore$ 易知点 E 的运动路径是线段 BE'（除点 B），$\therefore$ 当点 E 运动到点 E' 时，$\angle BEC$ 有最小值，为 $45°$，即 $\angle BEP+\angle PQC$ 的最小值为 $45°$. 故选 B.

4. 2 【解析】连接 CH，如图. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AD // BC$，$\angle A=90°$，$AB=AD=BC$. $\because$ 点 E,F 分别为 AD,BC 的中点，$\therefore AE//BF$，$AE=DE=\frac{1}{2}AD$，$BF=CF=\frac{1}{2}BC$，$\therefore AE=BF$，$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 是平行四边形. $\because \angle A=90°$，$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 是矩形，$\therefore \angle BFE=\angle GEH=90°$，$\therefore EF$ 垂直平分 BC，$\therefore HB=HC$. 由翻折得 $HB=AB$，$\angle BHG=\angle A=90°$，$\therefore HB=HC=BC$，$\therefore \triangle HBC$ 是等边三角形，$\therefore \angle BHC=60°$，$\therefore \angle EGH=90°-\angle EHG=\angle BHF=\angle CHF=\frac{1}{2}\angle BHC=30°$，$\therefore AG=HG=2EH=2\times1=2$. 故答案为 2.



关键点拨

连接 CH，先根据条件证明四边形 $ABFE$ 是矩形，再结合翻折的性质证明 $\triangle HBC$ 是等边三角形，进而即可求解.

5. $(\sqrt{3})^{2\,024}$ 【解析】$\because$ 四边形 $ABCB_1$ 是正方形，$\therefore AB_1=AB=1$，$\angle AB_1A_1=90°$，$AB//A_1C$，$\therefore \angle CA_1A=30°$，$\therefore A_1A=2AB_1=2$，$\therefore A_1B_1=\sqrt{A_1A^2-AB_1^2}=\sqrt{3}$，$\therefore A_1B_1=\sqrt{3}AB$，同理可得 $\angle A_1B_2A_2=90°$，$\angle B_2A_2A_1=30°$，$\therefore$ 易得 $A_2B_2=\sqrt{3}A_1B_1=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=(\sqrt{3})^2$，$A_3B_3=\sqrt{3}A_2B_2=\sqrt{3}\times(\sqrt{3})^2=(\sqrt{3})^3$，$\cdots$，$\therefore A_nB_n=(\sqrt{3})^n$，$\therefore A_{2\,024}B_{2\,024}=(\sqrt{3})^{2\,024}$，故答案为 $(\sqrt{3})^{2\,024}$.

刷素养

6. (1)【证明】过点 E 作 $EM\perp AD$ 于点 M，ME 的延长线交 BC 于点 N，过点 E 作 $EH\perp AB$ 于点 H，如图(1)所示.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AB=AD$，$\angle BAD=\angle B=\angle BCD=\angle CDA=90°$，$\angle BAC=\angle DAC=45°$，$AD//BC$，$\therefore EN\perp BC$，$\therefore \angle FNE=\angle EMD=90°$，四边形 $ABNM$、四边形 $CDMN$ 和四边形 $AMEH$ 都是矩形，$\therefore MN=AB=AD$，$\angle 1+\angle 2=90°$.

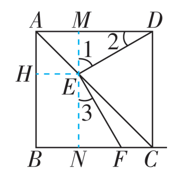
$\because EF\perp DE$，$\therefore \angle 1+\angle 3=90°$，$\therefore \angle 3=\angle 2$.

$\because EM\perp AD$，$\angle DAC=45°$，$\therefore \triangle AME$ 是等腰直角三角形，$\therefore AM=EM$.

$\because MN=AD$，$\therefore EM+EN=DM+AM$，$\therefore EN=DM$.

在 $\triangle ENF$ 和 $\triangle DME$ 中，$\begin{cases}\angle FNE=\angle EMD=90°,\\ EN=DM,\\ \angle 3=\angle 2,\end{cases}$

$\therefore \triangle ENF\cong\triangle DME$（ASA），$\therefore EF=ED$.

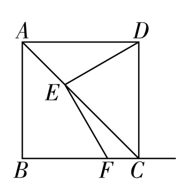


图(1)

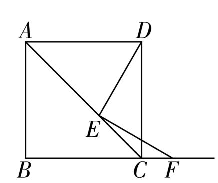
【解】(2) $\because$ 四边形 $ABNM$ 是矩形，四边形 $ABCD$ 是正方形，$AB=2$，$\therefore AM=BN$，$AD=AB=2$. 如图(1)，设 $AM=EM=BN=a$，$\therefore DM=AD-AM=2-a$. 在 Rt$\triangle DME$ 中，由勾股定理得 $EM^2+DM^2=DE^2$，$\therefore a^2+(2-a)^2=(\sqrt{2})^2$，整理得 $a^2-2a+1=0$，$\therefore (a-1)^2=0$，$\therefore a-1=0$，$\therefore a=1$，$\therefore AM=EM=BN=a=1$. $\because \triangle ENF\cong\triangle DME$，$\therefore FN=EM=1$，$\therefore BF=BN+FN=2$，故答案为 2.

(3) $\angle EFC$ 的度数是 $120°$ 或 $30°$. $\because$ 点 E 为对角线 AC 上一点，$\therefore$ 线段 DE 与正方形 $ABCD$ 的某条边的夹角是 $30°$ 时，有以下两种情况：

①当 DE 与 AD 的夹角是 $30°$ 时，即 $\angle ADE=30°$，如图(2)所示，$\therefore \angle EDC=\angle CDA-\angle ADE=60°$. $\because EF\perp DE$，$\therefore \angle DEF=90°$. 在四边形 $DEFC$ 中，$\angle EFC+\angle FCD+\angle EDC+\angle DEF=360°$，$\therefore \angle EFC+90°+60°+90°=360°$，$\therefore \angle EFC=120°$.



图(2)



图(3)

关键点拨

(3) 注意分两种情况讨论：①当 DE 与 AD 的夹角是 $30°$ 时；②当 DE 与 DC 的夹角是 $30°$ 时.

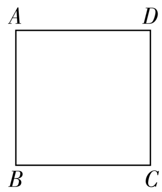
②当 DE 与 DC 的夹角是 $30°$ 时，即 $\angle CDE=30°$，如图(3)所示. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore \angle DCA=\angle BCA=45°$. 在 $\triangle CDE$ 中，$\angle CED=180°-(\angle CDE+\angle DCA)=180°-(30°+45°)=105°$. $\because EF\perp DE$，$\therefore \angle DEF=90°$，$\therefore \angle CEF=\angle CED-\angle DEF=105°-90°=$

$15°$. ∵ $\angle BCA$ 是 $\triangle CEF$ 的外角, ∴ $\angle BCA=\angle CEF+\angle EFC$, ∴ $45°=15°+\angle EFC$, ∴ $\angle EFC=30°$. 综上所述, $\angle EFC$ 的度数是 $120°$或 $30°$.

课时 2　正方形的判定

刷基础

1. C　【解析】如图. ∵ $AB/\!/CD$, ∴ $\angle A+\angle D=180°$. ∵ $\angle A=90°$, ∴ $\angle A=\angle D=90°$. ∵ $\angle B=\angle D$, ∴ $\angle A=\angle B=\angle D=90°$, ∴ 四边形 $ABCD$ 是矩形, ∴ 添加条件 $BC=CD$ 可得四边形 $ABCD$ 是正方形, 故选 C.



2. D　【解析】∵ EF 垂直平分 BC, ∴ $BE=EC$, $BF=CF$. ∵ $BF=BE$, ∴ $BE=EC=CF=BF$, ∴ 四边形 $BECF$ 是菱形. 当 $BC=AC$ 时, ∵ $\angle ACB=90°$, ∴ $\angle ABC=\angle A=45°$, ∴ 易知菱形 $BECF$ 是正方形, 故选项 A 不符合题意. 当 $BD=DF$ 时, $BC=EF$, 则菱形 $BECF$ 是正方形, 故选项 B 不符合题意. 当 $CF\perp BF$ 时, $\angle BFC=90°$, 则菱形 $BECF$ 是正方形, 故选项 C 不符合题意. 当 $AC=BF$ 时, 无法证明菱形 $BECF$ 是正方形, 故选项 D 符合题意. 故选 D.

3.【证明】(1) ∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形, ∴ $AB=AD$, $\angle B=\angle D$, $\angle BAC=\angle DAC$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADF$ 中, $\begin{cases}AB=AD,\\ \angle B=\angle D,\\ BE=DF,\end{cases}$ ∴ $\triangle ABE\cong\triangle ADF(\mathrm{SAS})$, ∴ $AE=AF$, $\angle BAE=\angle DAF$, ∴ $\angle EAG=\angle FAG$. ∵ $FG/\!/AE$, ∴ $\angle EAG=\angle FGA$, ∴ $\angle FAG=\angle FGA$, ∴ $FG=AF=AE$. 又 ∵ $FG/\!/AE$, ∴ 四边形 $AEGF$ 是菱形.

(2) ∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形, ∴ $BC/\!/AD$, ∴ $\angle B+\angle BAD=180°$. ∵ $\angle B=\angle BAE=30°$, $\triangle ABE\cong\triangle ADF$, ∴ $\angle DAF=\angle BAE=30°$, $\angle BAD=180°-\angle B=150°$, ∴ $\angle EAF=\angle BAD-\angle BAE-\angle DAF=150°-30°-30°=90°$. ∵ 四边形 $AEGF$ 是菱形, ∴ 四边形 $AEGF$ 是正方形.

4. 1　【解析】∵ 点 E,F,G,H 分别是四边形 $ABCD$ 的边 AB,BC,CD,DA 的中点, ∴ $EF/\!/AC$, $EF=\dfrac{1}{2}AC$, $GH/\!/AC$, $GH=\dfrac{1}{2}AC$, $EH/\!/BD$, $EH=\dfrac{1}{2}BD$, ∴ $EF/\!/GH$, $EF=HG$, ∴ 四边形 $EFGH$ 为平行四边形. ①当 $AC=BD$ 时, $EF=EH$, 则四边形 $EFGH$ 为菱形, ①说法错误; ②当 $AC\perp BD$ 时, $EF\perp EH$, 则四边形 $EFGH$ 为矩形, ②说法错误; ③四边形 $EFGH$ 一定是平行四边形, AC 与 BD 不一定互相平分, ③说法错误; ④当四边形 $EFGH$ 是正方形时, AC 与 BD 互相垂直且相等, ④说法正确. 故答案为 1.

关键点拨　一般四边形的中点四边形是平行四边形, 当对角线相等时, 中点四边形是菱形; 当对角线互相垂直时, 中点四边形是矩形; 当对角线相等且互相垂直时, 中点四边形是正方形.

5. (1)【证明】∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形, ∴ $AB=AD=DC=BC$, $\angle ABC=\angle ADC=\angle ADH=\angle BAD=90°$. 在 $\triangle ADH$ 和 $\triangle ABK$ 中, $\begin{cases}AD=AB,\\ \angle ADH=\angle ABK,\\ DH=BK,\end{cases}$ ∴ $\triangle ADH\cong\triangle ABK(\mathrm{SAS})$, ∴ $AK=AH$.

(2)【证明】∵ $\triangle ADH\cong\triangle ABK$, $\angle BAD=90°$, ∴ $\angle HAD=\angle BAK$, ∴ $\angle HAK=90°$. 易得 $\triangle HGF\cong\triangle KEF\cong\triangle ABK\cong\triangle ADH$, ∴ $AH=AK=HF=FK$. 又 ∵ $\angle HAK=90°$, ∴ 四边形 $AKFH$ 是正方形.

(3)【解】由(2)得 $AB=KE$, $BK=EF$. ∵ 四边形 $AKFH$ 的面积为 10, ∴ $KF^2=10$. ∵ $EF=CE=1$, ∴ $KE=\sqrt{KF^2-EF^2}=\sqrt{10-1}=3$, ∴ $AB=KE=3$. ∵ $BK=EF=1$, ∴ $BE=BK+KE=4$, ∴ $AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, 故点 A,E 之间的距离为 5.

刷易错

6.【解】不正确. 条件: $AO=CO$, $BO=DO$, $\angle DAB=90°$, $AB=AD$. 证明: 当 $AO=CO$, $BO=DO$, $\angle DAB=90°$时, 四边形 $ABCD$ 为矩形, 再根据 $AB=AD$, 可判定四边形 $ABCD$ 为正方形. (答案不唯一, 合理即可)

易错警示　可按照四边形→平行四边形→矩形(菱形)→正方形的顺序依次添加条件, 使四边形 $ABCD$ 为正方形. 不可混淆特殊四边形的判定.

刷提升

1. C　【解析】在菱形 $ABCD$ 中, $AB\perp BC$, ∴ $\angle B=90°$, ∴ 四边形 $ABCD$ 是正方形, ∴ $\angle A=\angle C=90°$, $AD/\!/BC$, $AD=DC$, $AB/\!/CD$. ∵ $EH\perp BC$, ∴ $EH\perp AD$. ∵ $FG\perp EH$, ∴ 易得四边形 $AFOE$ 和四边形 $HOGC$ 是矩形, $EH=FG$. ∵ $OE=OF$, ∴ 四边形 $AFOE$ 是正方形, $OH=OG$, ∴ 四边形 $OHCG$ 是正方形, 故有 3 个正方形, 故选 C.

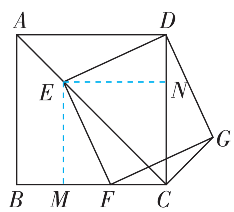
2. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　【解析】第 1 个正方形的边长是 1,

所以面积是 1；第 2 个正方形的对角线的长与第 1 个正方形的边长相等，所以面积是 $\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$；第 3 个正方形的对角线的长与第 2 个正方形的边长相等，所以易得面积是 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$；…，以此类推，后一个正方形的面积是前一个正方形的面积的一半，所以第 n 个正方形的面积是 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. 故答案为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

思路分析 观察可得后一个正方形的对角线的长与前一个正方形的边长相等，根据正方形的面积等于边长的平方，也等于对角线乘积的一半可知后一个正方形的面积等于前一个正方形的面积的一半，以此求解即可.

3. ①②④ 【解析】如图，作 $EM\perp BC$ 于 M，$EN\perp CD$ 于 N，则 $\angle END=\angle FME=90°$. ∵ 点 E 是正方形 $ABCD$ 对角线上的点，∴ $EM=EN$，易得 $\angle MEN=90°$. ∵ $\angle DEF=90°$，∴ $\angle DEN=\angle MEF$. 在 $\triangle DEN$ 和 $\triangle FEM$ 中，

$$\begin{cases}\angle DNE=\angle FME,\\ EN=EM,\\ \angle DEN=\angle FEM,\end{cases}$$



∴ $\triangle DEN\cong\triangle FEM$ (ASA)，∴ $EF=DE$. ∵ 四边形 $DEFG$ 是矩形，∴ 矩形 $DEFG$ 是正方形，故②正确. 由②得 $DE=DG$，$\angle EDG=\angle ADC=90°$，∴ $\angle ADE=\angle CDG$. ∵ $AD=CD$，∴ $\triangle ADE\cong\triangle CDG$ (SAS)，故①正确. 由①得 $\angle DAE=\angle DCG=45°$. ∵ $\angle ACD=45°$，∴ $\angle ACG=90°$，是定值，故③错误. ∵ $\triangle ADE\cong\triangle CDG$，∴ $AE=CG$，∴ $CE+CG=CE+AE=AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{18}$，是定值，故④正确. 故答案为①②④.

4. (1)【证明】∵ 矩形 $ABCD$，∴ $\angle BAF=\angle ABE=90°$. ∵ $EF\perp AD$，∴ $\angle AFE=90°$，∴ 四边形 $ABEF$ 是矩形. ∵ AE 平分 $\angle BAD$，∴ $EF=EB$，∴ 四边形 $ABEF$ 是正方形.

(2)【证明】∵ AE 平分 $\angle BAD$，∴ $\angle DAG=\angle BAE$. ∵ $DG\perp AE$，∴ $\angle AGD=\angle ABE=90°$.

在 $\triangle AGD$ 和 $\triangle ABE$ 中，$\begin{cases}\angle DAG=\angle BAE,\\ \angle AGD=\angle ABE,\\ AD=AE,\end{cases}$

∴ $\triangle AGD\cong\triangle ABE$ (AAS)，∴ $AB=AG$.

思路分析 (2) 证明 $\triangle AGD\cong\triangle ABE$ 即可.

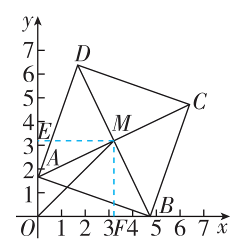
(3)【解】由 (1) 知四边形 $ABEF$ 是正方形，∴ $AB=AF=1$. 由 (2) 知 $\triangle AGD\cong\triangle ABE$，$\angle AGD=90°$，∴ $DG=BE=AF=AB=AG=1$，∴ $AD=\sqrt{2}$，$\angle DAG=\angle ADG=45°$，∴ $DF=\sqrt{2}-1$. ∵ $EF\perp AD$，∴ $\angle FDO=\angle FOD=45°$，∴ $OF=DF=\sqrt{2}-1$.

刷素养

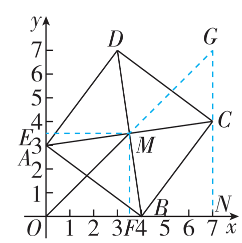
5. (1)【证明】作 $ME\perp y$ 轴于 E 点，作 $MF\perp x$ 轴于 F 点，如图(1)所示，则四边形 $EMFO$ 是矩形，$\angle MEA=\angle MFB=90°$，∴ $\angle EMA+\angle AMF=90°$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $MA=MB$，$\angle AMF+\angle FMB=90°$，∴ $\angle EMA=\angle FMB$.

在 $\triangle MEA$ 和 $\triangle MFB$ 中，$\begin{cases}\angle MEA=\angle MFB,\\ \angle EMA=\angle FMB,\\ MA=MB,\end{cases}$

∴ $\triangle MEA\cong\triangle MFB$ (AAS)，∴ $ME=MF$，∴ 四边形 $EMFO$ 是正方形，∴ 点 M 在 $\angle AOB$ 的平分线上，∴ 在这个运动过程中，M 始终在第一象限的角平分线上.



图(1)



图(2)

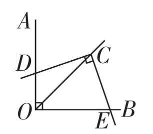
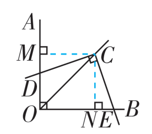
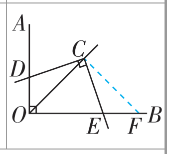
(2)【解】∵ 点 A 运动到 $(0,3)$，∴ $OA=3$. ∵ $AB=5$，∴ $OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$. 作 $ME\perp y$ 轴于 E 点，作 $MF\perp x$ 轴于 F 点，作 $CN\perp x$ 轴于 N 点，如图(2)所示，则 $MF/\!/OA/\!/CN$，$\angle AOB=\angle CNB=90°$，∴ 结合(1)知四边形 $EMFO$ 是正方形. ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $MA=MC$，$AB=BC$，$\angle ABC=90°$，∴ $\angle ABO+\angle CBN=90°$. ∵ $\angle BAO+\angle ABO=90°$，∴ $\angle BAO=\angle CBN$.

在 $\triangle BAO$ 和 $\triangle CBN$ 中，$\begin{cases}\angle AOB=\angle CNB,\\ \angle BAO=\angle CBN,\\ AB=BC,\end{cases}$

∴ $\triangle BAO\cong\triangle CBN$ (AAS)，∴ $CN=OB=4$，$BN=OA=3$. 延长 OM 与 NC 交于点 G. ∵ $OA/\!/CN$，∴ $\angle AOM=\angle MGC$. 又 ∵ $MA=MC$，$\angle AMO=\angle GMC$，∴ $\triangle AMO\cong\triangle CMG$，∴ $OA=GC$，$OM=MG$，∴ MF 是 $\triangle ONG$ 的中位线，∴ $MF=\frac{1}{2}(GC+CN)=\frac{1}{2}(OA+CN)=\frac{1}{2}\times(3+4)=\frac{7}{2}$，$OF=\frac{1}{2}(OB+BN)=\frac{1}{2}\times(4+3)=\frac{7}{2}$，

∴ M 点的坐标为 $\left(\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)$.

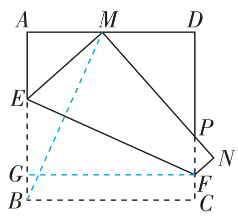
模型归纳｜含 90°角的对角互补模型

基本模型	作垂线法	旋转法
		
已知：$CD=CE$，$\angle AOB=\angle DCE=90°$	结论：①OC 平分 $\angle AOB$； ②$OD+OE=\sqrt{2}OC$； ③$S_{\triangle OCD}+S_{\triangle OCE}=\frac{1}{2}OC^2$	

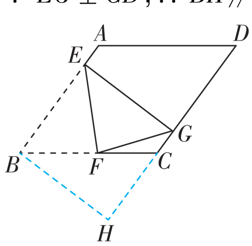
重难专题 1　特殊平行四边形中折叠求长度

刷难关

1. 13　【解析】如图，过点 F 作 $FG\perp AB$，垂足为 G，连接 BM. ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $AB=BC$. 易知四边形 $BCFG$ 是矩形，∴ $FG=BC$，∴ $AB=FG$. ∵ 由折叠易知 $BM\perp FE$，∴ $\angle EBM+\angle BEF=90°$. ∵ $\angle BMA+\angle EBM=90°$，∴ $\angle BEF=\angle BMA$. 又∵ $\angle A=\angle EGF=90°$，∴ $\triangle ABM\cong\triangle GFE$，∴ $EF=BM=\sqrt{AB^2+AM^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$（cm）. 故答案为 13.

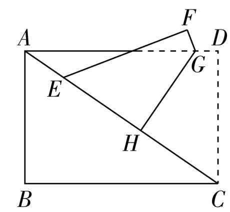


2. $\frac{9}{14}$　【解析】如图，作 $BH\perp CD$ 交 DC 的延长线于点 H，则 $\angle H=90°$. ∵ $EG\perp CD$，∴ $BH//EG$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，∴ $AB//CD$，$AB=BC=CD$，∴ $BE//GH$，∴ 四边形 $BEGH$ 是平行四边形，∴ $BH=GE$，$GH=BE=4$. 由翻折得 $GE=BE=4$，∴ $BH=GE=4$. ∵ $DG=3$，∴ $DH=DG+GH=3+4=7$. ∵ $BH^2+CH^2=BC^2$，$CH=7-CD=7-AB$，∴ $4^2+(7-AB)^2=AB^2$，解得 $AB=\frac{65}{14}$，∴ $AE=AB-BE=\frac{65}{14}-4=\frac{9}{14}$，故答案为 $\frac{9}{14}$.

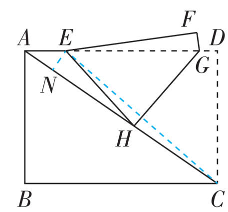


3. 2 或 $\frac{15}{7}$　【解析】∵ $AC=5$，$CD=3$，∴ $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{25-9}=4$. 如图（1），当点 E 落在 AC 上时，∵ 将 $\triangle ACD$ 沿直线 GH 折叠，∴ $CH=EH$. ∵ $AE=1$，∴ $EC=4$，∴ $CH=2$. 如图（2），当点 E 落在 AD 上时，连接 EC，过点 E 作 $EN\perp AC$ 于 N. ∵ $S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}\times AE\times CD=\frac{1}{2}\times AC\times EN$，∴ $1\times3=5\times EN$，∴ $EN=\frac{3}{5}$，∴ $AN=\sqrt{AE^2-EN^2}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$，∴ $NC=\frac{21}{5}$. ∵ 将 $\triangle ACD$ 沿直线 GH 折叠，∴ $CH=EH$. ∵ $EN^2+NH^2=EH^2$，∴ $\frac{9}{25}+\left(\frac{21}{5}-HC\right)^2=HC^2$，∴ $HC=\frac{15}{7}$.

综上所述，CH 的长为 2 或 $\frac{15}{7}$.



图（1）



图（2）

技巧点拨 矩形中折叠必出等腰三角形：平行＋角平分线（折叠）⇒等腰三角形.

4. （1）【证明】由折叠可知，$\angle AEF=\angle CEF$. 由矩形性质可得 $AD//BC$，∴ $\angle AFE=\angle CEF$，∴ $\angle AEF=\angle AFE$，∴ $AE=AF$，∴ $\triangle AEF$ 为等腰三角形.

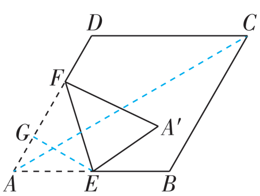
（2）【解】由折叠可得 $AE=CE$. 设 $CE=x=AE$，则 $BE=BC-CE=8-x$. ∵ $\angle B=90°$，∴ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$AB^2+BE^2=AE^2$，即 $4^2+(8-x)^2=x^2$，解得 $x=5$. 由（1）可得 $AF=AE=5$，∴ $FD=AD-AF=BC-AF=8-5=3$.

刷有所得 解决此类题时常常设要求的线段长为 x，然后根据折叠的性质及线段的和差关系用含 x 的代数式表示其他线段的长度，选择适当的直角三角形，运用勾股定理列出方程并求解.

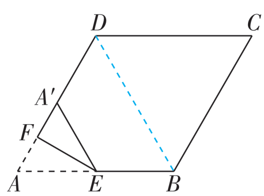
5. D　【解析】∵ 矩形纸片 $ABCD$ 中，$BC=3$，$AB=4$，∴ $\angle B=\angle A=\angle C=90°$，$BC=AD=3$，$AB=DC=4$. 根据折叠可知 $\triangle DCP\cong\triangle DEP$，∴ $DC=DE=4$，$\angle E=\angle C=90°$，$CP=EP$，∴ $\angle E=\angle B=90°$. 在 $\triangle OBP$ 和 $\triangle OEF$ 中，
$$\begin{cases}\angle B=\angle E,\\ \angle BOP=\angle EOF,\\ OP=OF,\end{cases}$$
∴ $\triangle OBP\cong\triangle OEF$（AAS），∴ $EF=BP$，$OE=OB$，∴ $BF=OB+OF=OE+OP=PE$，∴ $BF=EP=CP$. 设 $BF=EP=CP=x$，则 $AF=4-x$，$BP=3-x=EF$，∴ $DF=DE-EF=4-(3-x)=x+1$. ∵ $\angle A=90°$，∴ $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 中，$AF^2+AD^2=DF^2$，即 $(4-x)^2+3^2=(1+x)^2$，解得 $x=\frac{12}{5}$，∴ $BF=\frac{12}{5}=2.4$，故选 D.

6. $3-\sqrt{3}$ 或 3　【解析】①连接 AC，若 $A'E//AC$，如图（1）. 由条件可知 AC 平分 $\angle BAD$，∴ $\angle BAC=\frac{1}{2}\times60°=30°$. ∵ $A'E//AC$，∴ $\angle A'EB=\angle BAC=30°$. 由折叠得 $\angle AEF=\angle A'EF$，∴ $\angle AEF=\frac{1}{2}\times(180°-30°)=75°$，∴ $\angle AFE=180°-60°-75°=45°$. ∵ 点 E 是 AB 的中点，∴ $AE=\frac{1}{2}AB=$

2. 过点 E 作 $EG\perp AF$，垂足为 G，则 $\angle AGE=90°$，$\angle AEG=30°$，$\therefore AG=\dfrac{1}{2}AE=1$，$\therefore GE=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. 在 Rt$\triangle EFG$ 中，$\angle AFE=45°$，$\therefore\triangle EFG$ 为等腰直角三角形，$\therefore GF=GE=\sqrt{3}$，$\therefore AF=1+\sqrt{3}$. 又$\because AD=AB=4$，$\therefore DF=AD-AF=4-(1+\sqrt{3})=3-\sqrt{3}$. ②连接 BD，AA'，若 $A'E/\!/BD$，如图(2). 由条件可知 $AB=AD$. 又$\because\angle A=60°$，$\therefore\triangle ABD$ 是等边三角形，$\therefore\angle ABD=60°$. $\because A'E/\!/BD$，$\therefore\angle AEA'=60°$. 由折叠得 $AE=A'E$，$\therefore\triangle AEA'$ 是等边三角形，$\therefore\angle A'AE=60°$，$AA'=2$，$\therefore$ 点 A' 落在 AD 上. $\because A'F=AF$，$\therefore AF=1$，$\therefore DF=3$. 综上，DF 的长为 $3-\sqrt{3}$ 或 3. 故答案为 $3-\sqrt{3}$ 或 3.



图(1)

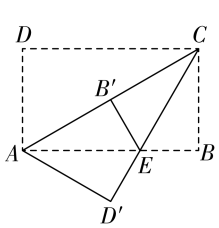


图(2)

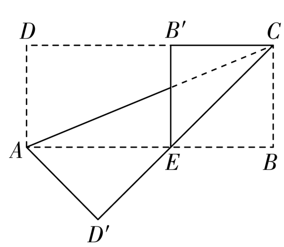
7. $\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{2}+1$ 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，$\therefore BC=AD=1$，$\angle B=\angle D=90°$. $\because\triangle ADC$ 沿对角线 AC 翻折得到 $\triangle AD'C$，$\therefore\angle D'=\angle D=90°$，$AD'=AD=1$，$\therefore AD'=CB$. $\because$ 将 $\triangle BCE$ 沿 CE 翻折得到 $\triangle B'CE$，$\therefore\angle CB'E=\angle B=90°$，$CB'=CB=1$.

①当点 B' 恰好落在边 AC 上时，如图(1). 在 $\triangle AD'E$ 和 $\triangle CBE$ 中，$\begin{cases}\angle AED'=\angle CEB,\\ \angle D'=\angle B=90°,\\ AD'=CB,\end{cases}$

$\therefore\triangle AD'E\cong\triangle CBE$(AAS)，$\therefore EA=EC$，即 $\triangle EAC$ 为等腰三角形. $\because\angle CB'E=90°$，$\therefore$ 点 B' 为 AC 中点，$\therefore AC=2CB'=2$. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB^2+BC^2=AC^2$，即 $AB^2+1^2=2^2$，$\therefore AB=\sqrt{3}$(负值已舍去).



图(1)



图(2)

②当点 B' 恰好落在边 DC 上时，如图(2). $\because\angle CB'E=\angle B=\angle DCB=90°$，$\therefore$ 四边形 $B'EBC$ 为矩形，$\therefore B'E=CB=1$. $\because\triangle BCE$ 沿 CE 翻折得到 $\triangle B'CE$，$\therefore BE=B'E=1$，$\therefore$ 在 Rt$\triangle CBE$ 中，$CE=\sqrt{CB^2+BE^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. 同①可得 $\triangle AD'E\cong\triangle CBE$，$\therefore AE=CE=\sqrt{2}$，$\therefore AB=AE+BE=\sqrt{2}+1$. 故答案为 $\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{2}+1$.

技巧点拨

特殊平行四边形折叠问题的关键解题步骤：(1)由折叠确定等角及等长线段；(2)设未知数，利用勾股定理建立方程.

大招专题 1　正方形中的三种常考模型

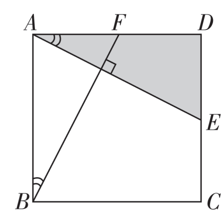
刷难关

大招解读｜“十字架”模型

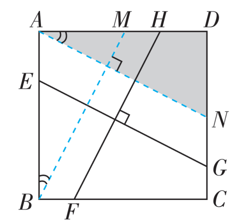
在正方形的对边分别取点并相连，所得两条线段，若垂直，则相等；若相等，则垂直.

简记：垂直即相等；相等即垂直.

①线段过顶点时，如图(1). 易证 $\triangle ADE\cong\triangle BAF$(ASA)，$\therefore AE=BF$.



图(1)



图(2)

②线段不过顶点时，如图(2)，作 $AN/\!/EG$，$BM/\!/HF$. 易证 $\triangle ADN\cong\triangle BAM$(ASA)，$\therefore AN=BM$，$\therefore$ 易得 $EG=FH$.

1. (1)【证明】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AB=AD=BC$，$\angle DAM=\angle ABN=90°$. $\because BM=CN$，$\therefore BC-CN=AB-BM$，即 $BN=AM$.

在 $\triangle ABN$ 和 $\triangle DAM$ 中，$\begin{cases}AB=AD,\\ \angle ABN=\angle DAM,\\ BN=AM,\end{cases}$

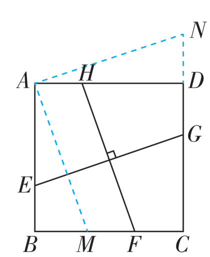
$\therefore\triangle ABN\cong\triangle DAM$(SAS).

(2)【解】由(1)知 $\triangle ABN\cong\triangle DAM$，$\therefore\angle MAP=\angle ADM$，$\therefore\angle MAP+\angle AMP=\angle ADM+\angle AMP=180°-\angle DAM=90°$，$\therefore\angle APM=180°-(\angle MAP+\angle AMP)=90°$.

思路分析

过点 A 作 $AM/\!/HF$ 交 BC 于点 M，作 $AN/\!/EG$ 交 CD 的延长线于点 N，利用正方形的性质得 $AB=AD$，$\angle ABM=\angle BAD=\angle ADN=90°$，结合已知条件证出 $\triangle ABM\cong\triangle ADN$ 即可求解.

2.【解】$\dfrac{EG}{FH}=1$. 证明：如图，过点 A 作 $AM/\!/HF$ 交 BC 于点 M，作 $AN/\!/EG$ 交 CD 的延长线于点 N，$\therefore$ 易得 $AM=HF$，$AN=EG$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AB=AD$，$\angle ABM=\angle BAD=\angle ADN=90°$. $\because EG\perp FH$，$\therefore AM\perp AN$，$\therefore\angle NAM=90°$，$\therefore\angle BAM=\angle DAN$. 在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ADN$ 中，



$\begin{cases}\angle BAM=\angle DAN,\\ AB=AD,\\ \angle ABM=\angle ADN,\end{cases}$ $\therefore\triangle ABM\cong\triangle ADN$(ASA)，

$\therefore AM=AN$，即 $EG=FH$，$\therefore \dfrac{EG}{FH}=1$.

3. (1)【解】$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$AE\perp DF$，$\therefore AB=AD$，$\angle DAF=\angle ABE=90^\circ$，$\angle AOD=90^\circ$，$\therefore \angle DAO+\angle BAE=90^\circ$，$\angle DAO+\angle ADF=90^\circ$，$\therefore \angle BAE=\angle ADF$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DAF$ 中，$\begin{cases}\angle BAE=\angle ADF,\\ AB=AD,\\ \angle ABE=\angle DAF,\end{cases}$ $\therefore \triangle ABE\cong\triangle DAF$ (ASA)，$\therefore AE=DF$. 故答案为 $AE=DF$.

(2)【证明】如图(1)，过点 E 作 $EM\perp BC$ 于点 M，则四边形 $ABME$ 为矩形，$\therefore AB=EM$. 在正方形 $ABCD$ 中，$AB=BC$，$\therefore EM=BC$.

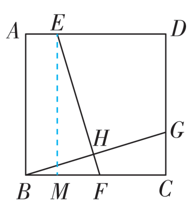
$\because EM\perp BC$，$\therefore \angle MEF+\angle EFM=90^\circ$.

$\because BG\perp EF$，$\therefore \angle CBG+\angle EFM=90^\circ$，

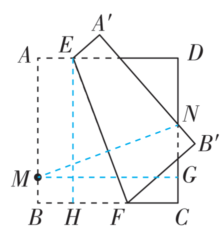
$\therefore \angle CBG=\angle MEF$.

在 $\triangle BCG$ 和 $\triangle EMF$ 中，$\begin{cases}\angle CBG=\angle MEF,\\ BC=EM,\\ \angle C=\angle EMF=90^\circ,\end{cases}$

$\therefore \triangle BCG\cong\triangle EMF$ (ASA)，$\therefore BG=EF$.



图(1)



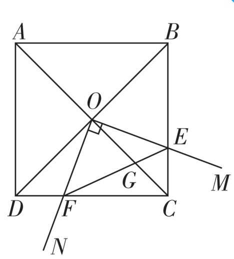
图(2)

(3)【解】如图(2)，连接 MN. $\because M,N$ 关于 EF 对称，$\therefore MN\perp EF$. 过点 E 作 $EH\perp BC$ 于点 H，过点 M 作 $MG\perp CD$ 于点 G，则易知 $EH\perp MG$. 同(2)可得 $\triangle EHF\cong\triangle MGN$，$\therefore NG=HF$.

$\because AE=2$，$BF=5$，$\therefore NG=HF=BF-BH=BF-AE=5-2=3$. 又 $\because GC=MB=1$，$\therefore NC=NG+CG=3+1=4$.

大招解读｜对角互补模型

如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 O 是对角线 AC，BD 的交点，过点 O 作射线 OM，ON，分别交 BC，CD 于点 E，F，且 $\angle EOF=90^\circ$，OC，EF 交于点 G.



结论：① $\triangle COE\cong\triangle DOF$；② $\triangle OBE\cong\triangle OCF$；③ $\triangle OEF$ 是等腰直角三角形；④四边形 $CEOF$ 的面积为正方形 $ABCD$ 面积的 $\dfrac{1}{4}$.

4.【解】(1) $OE=OF$. 证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore OA=OB$，$\angle AOB=90^\circ$，$\therefore \angle OAB=\angle OBA=\angle OBF=45^\circ$，$\angle AOE+\angle BOE=90^\circ$. $\because \angle MOP=90^\circ$，$\therefore \angle BOE+\angle BOF=90^\circ$，$\therefore \angle BOF=\angle AOE$. 在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle BOF$ 中，$\begin{cases}\angle OAE=\angle OBF=45^\circ,\\ OA=OB,\\ \angle AOE=\angle BOF,\end{cases}$

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle BOF$ (ASA)，$\therefore OE=OF$.

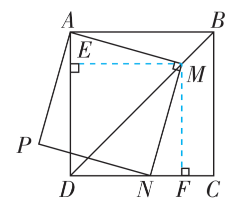
(2) $\because \triangle AOE\cong\triangle BOF$，$\therefore S_{\triangle AOE}=S_{\triangle BOF}$，$\therefore S_{\triangle AOE}+S_{\triangle OBE}=S_{\triangle BOF}+S_{\triangle OBE}$，即 $S_{\triangle AOB}=S_{四边形OEBF}$. $\because S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{4}S_{四边形ABCD}=\dfrac{1}{4}\times3^2=\dfrac{9}{4}$，

$\therefore S_{四边形OEBF}=\dfrac{9}{4}$. 故答案为 $\dfrac{9}{4}$.

关键点拨

(2)由(1)得 $\triangle AOE$ 与 $\triangle BOF$ 全等，将四边形 $OEBF$ 的面积转化为 $\triangle OAB$ 的面积是解题关键.

5. (1)【证明】如图，过点 M 作 $ME\perp AD$ 于点 E，$MF\perp CD$ 于点 F. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore \angle ADC=90^\circ$，$\angle MDA=\angle MDC=45^\circ$. $\because ME\perp AD$，$MF\perp CD$，$\therefore ME=MF$.



$\because \angle MED=\angle MFD=\angle EDF=90^\circ$，$\therefore$ 四边形 $EMFD$ 是正方形，$\therefore \angle EMF=90^\circ=\angle AMN$，$\therefore \angle AME=\angle NMF$.

在 $\triangle AME$ 和 $\triangle NMF$ 中，$\begin{cases}\angle AME=\angle NMF,\\ ME=MF,\\ \angle AEM=\angle NFM=90^\circ,\end{cases}$

$\therefore \triangle AME\cong\triangle NMF$ (ASA)，$\therefore AM=NM$. 又 $\because$ 四边形 $AMNP$ 是矩形，$\therefore$ 四边形 $AMNP$ 是正方形.

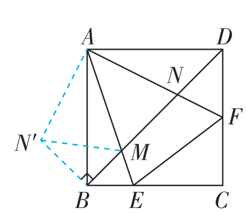
(2)【解】连接 AN. $\because$ 在正方形 $ABCD$ 中，点 N 为 CD 的中点，且 $AD=8$，$\therefore DN=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{1}{2}AD=4$，$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ADN$ 中，$AN^2=AD^2+DN^2=8^2+4^2=80$. $\because$ 四边形 $AMNP$ 是正方形，$\therefore$ 易知正方形 $AMNP$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}AN^2=\dfrac{1}{2}\times80=40$.

思路分析

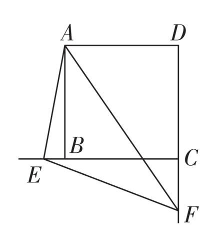
(2)先用勾股定理求出 AN^2，再根据正方形的面积等于对角线长的平方的一半求解.

大招解读｜半角模型

如图(1)，在正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别在 BC，CD 上，BD 分别交 AE，AF 于 M，N，若 $\angle EAF=45^\circ$，则有以下结论：① $EF=BE+DF$；② $C_{\triangle CEF}=2AB$；③ FA 平分 $\angle DFE$，EA 平分 $\angle BEF$；④ $MN^2=BM^2+DN^2$.



图(1)



图(2)

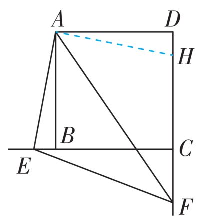
如图(2)，在正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别在 CB 的延长线、DC 的延长线上，若 $\angle EAF=45^\circ$，则有以下结论：① FA 平分 $\angle DFE$；② $EF=DF-BE$.

6.【解】(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $\angle D=\angle DAB=\angle ABC=90°$. 由旋转得 $\angle ABG=\angle D=\angle ABE=90°$，$\angle GAB=\angle FAD$，$AG=AF$，$BG=DF$，∴ G，B，E 共线. ∵ $\angle EAF=45°$，∴ $\angle EAG=\angle GAB+\angle BAE=\angle FAD+\angle BAE=45°=\angle EAF$.

在△EAF 和△EAG 中，$\begin{cases}AF=AG,\\ \angle EAF=\angle EAG,\\ AE=AE,\end{cases}$

∴ $\triangle EAF\cong\triangle EAG$(SAS)，∴ $EF=EG$. ∵ $BE+BG=EG$，∴ $BE+DF=EF$. 故答案为①45，②$BE+DF=EF$.

(2) $BE+EF=DF$. 证明如下：如图(1)，在 DC 上截取 $DH=BE$，连接 AH. 在△ABE 和△ADH 中，

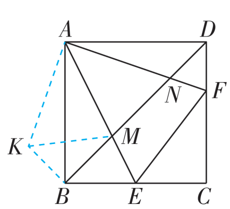


图(1)

$\begin{cases}AB=AD,\\ \angle ABE=\angle D=90°,\\ BE=DH,\end{cases}$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle ADH$(SAS)，∴ $AE=AH$，$\angle BAE=\angle DAH$，∴ $\angle BAE+\angle BAH=\angle BAH+\angle DAH=90°$，即 $\angle EAH=\angle BAD=90°$. ∵ $\angle EAF=45°$，∴ $\angle EAF=\angle FAH=45°$. 在△$EAF$ 和△HAF 中，$\begin{cases}AE=AH,\\ \angle EAF=\angle HAF,\\ AF=AF,\end{cases}$ ∴ $\triangle EAF\cong\triangle HAF$(SAS)，∴ $EF=HF$. ∵ $DH+HF=DF$，∴ $BE+EF=DF$.

(3)如图(2)，将△ADN 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到△ABK，连接 KM. ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $AB=AD=\sqrt{18}$，$\angle BAD=90°$，∴ $\angle ABD=$



图(2)

$\angle ADB=45°$，$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=6$，∴ $BM=\frac{1}{3}BD=2$，∴ $DM=BD-BM=4$. 由旋转可得，$\angle KAN=90°$，$AK=AN$，$BK=DN$，$\angle ABK=\angle ADB=45°$，∴ $\angle KBM=\angle ABK+\angle ABD=90°$. ∵ $\angle KAN=90°$，$\angle MAN=45°$，∴ $\angle KAM=\angle MAN=45°$. 又 ∵ $AM=AM$，∴ $\triangle AMK\cong\triangle AMN$，∴ $KM=MN$. 设 $MK=MN=x$，则 $BK=DN=4-x$. 在 Rt△BMK 中，$BK^2+BM^2=MK^2$，∴ $(4-x)^2+2^2=x^2$，解得 $x=2.5$，∴ $MN=2.5$.

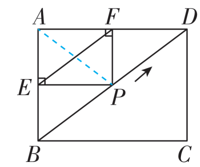
大招专题 2　特殊平行四边形中的最值问题

刷难关

大招解读｜根据垂线段最短求最值

在直角三角形中求线段长度的最小值时，通常利用矩形的对角线相等这一性质将所求线段长度的最小值转化成直角顶点与斜边动点连线的长度的最小值，此时根据垂线段最短即可求解.

1. A　【解析】如图，连接 AP. ∵ $PE\perp AB$，$PF\perp AD$，∴ $\angle AEP=\angle AFP=90°$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $\angle BAD=90°$，∴ 四边形 $AEPF$ 为矩形，∴ $AP=EF$，∴ 求 EF 的最小值就是求 AP 的最小值. ∵ 点 P 从点 B 出发，沿着 BD 往点 D 移动，∴ 当 $AP\perp BD$ 时，AP 取最小值. 在 Rt△BAD 中，$\angle BAD=90°$，$AB=3$，$AD=4$，∴ $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$. ∵ 当 $AP\perp BD$ 时，$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD=\frac{1}{2}AP\cdot BD$，∴ $AP=\frac{AB\cdot AD}{BD}=\frac{3\times4}{5}=\frac{12}{5}$，∴ EF 的最小值为 $\frac{12}{5}$. 故选 A.

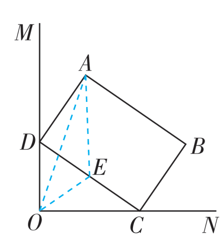


思路分析　连接 AP，依据 $PE\perp AB$，$PF\perp AD$，$\angle BAD=90°$，可得四边形 $AEPF$ 为矩形，借助矩形的对角线相等，将求 EF 的最小值转化成求 AP 的最小值，再结合垂线段最短，将问题转化成求 Rt△BAD 斜边上的高，利用等面积法即可求解.

大招解读｜根据三角形三边关系求最值

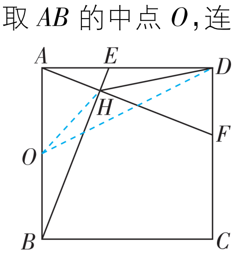
利用三角形三边关系解决最值问题时，构造出来的这个三角形要有两条边的长为定值，另外一边为要求的那条边.

2. 12　【解析】如图，取 CD 的中点 E，连接 OE，AE，OA. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=9$，$BC=6$，∴ $CD=9$，$AD=6$. ∵ $\angle MON=90°$，∴ $OE=DE=\frac{1}{2}CD=\frac{9}{2}$，$AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+6^2}=\frac{15}{2}$. ∵ $OA\leqslant OE+AE$，∴ 当 O，E，A 三点共线时，点 A 到点 O 的距离最大，∴ OA 的最大值为 $\frac{9}{2}+\frac{15}{2}=12$. 故答案为 12.



关键点拨　解决本题的关键是根据三角形的任意两边之和大于第三边，得到当 O，E，A 三点共线时，点 A 到点 O 的距离最大.

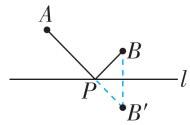
3. $\sqrt{5}-1$　【解析】如图所示，取 AB 的中点 O，连接 OH，OD. ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $AB=DA$，$\angle BAE=\angle ADF=90°$. 在△$BAE$ 和△ADF 中，$\begin{cases}AE=DF,\\ \angle BAE=\angle ADF,\\ AB=DA,\end{cases}$



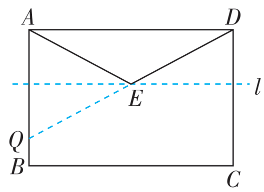
$\therefore \triangle BAE\cong\triangle ADF$(SAS),$\therefore \angle ABE=\angle DAF$. $\because \angle DAF+\angle BAF=90^\circ$,$\therefore \angle ABE+\angle BAF=90^\circ$,$\therefore \angle AHB=180^\circ-(\angle ABE+\angle BAF)=90^\circ$,$\therefore OH=\dfrac{1}{2}AB=1$. $\because DH\geqslant OD-OH$,$\therefore$ 当 O,H,D 三点在一条直线上时,DH 长度最小. $\because OD=\sqrt{OA^2+AD^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,$\therefore DH$ 长度的最小值为 $OD-OH=\sqrt{5}-1$. 故答案为$\sqrt{5}-1$.

大招解读 | “将军饮马”求最值

求直线同侧两点与直线上一动点所连线段和的最小值时,作其中一点关于直线的对称点,将两点转化到直线的两侧,利用两点之间线段最短求最小值.

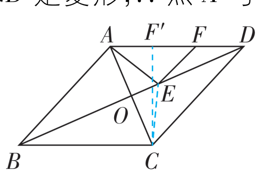


4. B 【解析】设 $\triangle EAD$ 的边 AD 上的高为 h. $\because S_{\triangle AED}=30$,$AD=15$,$\therefore \dfrac{1}{2}\cdot h\cdot 15=30$,$\therefore h=4$,$\therefore$ 点 E 在与 AD 平行且到 AD 的距离是 4 的直线 l 上运动. 如图,作点 A 关于直线 l 的对称点 Q,连接 DQ 交直线 l 于点 E,此时 $EA+ED$ 的值最小,最小值为 DQ 的长. 在 Rt$\triangle ADQ$ 中,$AD=15$,$AQ=4+4=8$,$\therefore DQ=\sqrt{AD^2+AQ^2}=17$,即 $EA+ED$ 的最小值为 17,故选 B.



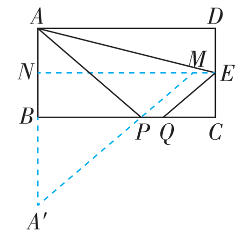
▶**关键点拨** 得到点 E 在与 AD 平行且到 AD 的距离是 4 的直线 l 上运动是解题关键.

5. $\dfrac{120}{13}$ 【解析】如图,连接 CE,过点 C 作 $CF'\perp AD$ 于 F'. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,$\therefore$ 点 A 与点 C 关于直线 BD 对称,$\therefore AE=CE$,$\therefore AE+EF=CE+EF\geqslant CF'$,$\therefore AE+EF$ 的最小值为 CF'的长. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,$AC=10$,$BD=24$,$\therefore AC\perp BD$,$OA=\dfrac{1}{2}AC=5$,$OD=\dfrac{1}{2}BD=12$,$\therefore$ 由勾股定理,得 $AD=\sqrt{OA^2+OD^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$,$\therefore S_{\text{菱形}ABCD}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD=AD\cdot CF'$,$\therefore \dfrac{1}{2}\times10\times24=13CF'$,解得 $CF'=\dfrac{120}{13}$,即 $AE+EF$ 的最小值为$\dfrac{120}{13}$. 故答案为$\dfrac{120}{13}$.



▶**思路分析** 连接 CE,过点 C 作 $CF'\perp AD$ 于 F'. 由菱形性质可得 $AE=CE$,即把 $AE+EF$ 的最小值转化为 $CE+EF$ 的最小值,即为 CF'的长.

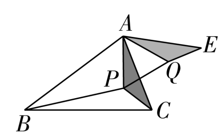
6. $\sqrt{85}$ 【解析】如图,过点 P 作 $PM/\!/QE$,过点 E 作 $EN/\!/BC$ 交 AB 于 N,交 PM 于 M,作点 A 关于 BC 的对称点 A',连接 $A'P$. 由对称性可知,$AP=A'P$,$A'B=AB$. $\because ME/\!/PQ$,$MP/\!/QE$,$\therefore$ 四边形 $PMEQ$ 为平行四边形,$\therefore PM=QE$,$\therefore AP+QE=A'P+PM$,$\therefore$ 当 A',P,M 共线时,$AP+QE$ 的值最小,为 $A'M$ 的长. $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,$AB=4$,$BC=8$,E 为 CD 的中点,$NE/\!/BC$,$\therefore CE=BN=2$,$NE=BC=8$,$A'B=4$,$\therefore A'N=6$. $\because PQ=1$,$\therefore ME=1$,$\therefore MN=7$. 在 Rt$\triangle A'MN$ 中,$A'M=\sqrt{A'N^2+MN^2}=\sqrt{85}$,$\therefore AP+QE$ 的最小值为 $\sqrt{85}$,故答案为 $\sqrt{85}$.



大招解读 | “费马定理”求最值

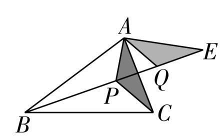
“费马点”是指到三角形三个顶点距离之和最小的点. 主要分为两种情况:(1)当三角形三个内角都小于 120°时,通常将其中一个小三角形绕大三角形的一个顶点旋转 60°.

例如:将 $\triangle APC$ 绕 A 点逆时针旋转 60°,得到 $\triangle AQE$,连接 PQ,如图(1),则 $\triangle APQ$ 为等边三角形,$PA=PQ$,$QE=PC$,即 $PA+PB+PC=PQ+PB+QE$,当 B,P,Q,E 四点共线时取得最小值,为 BE 的长,如图(2).



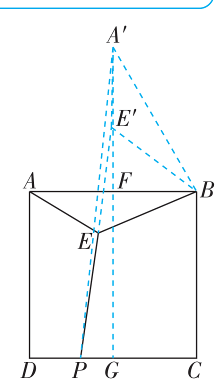
图(1)

(2)当三角形有一个内角大于或等于 120°时,费马点就是此内角的顶点.



图(2)

7. $\sqrt{3}+2$ 【解析】如图所示,将 $\triangle ABE$ 绕点 B 顺时针旋转 60°得到 $\triangle A'BE'$,连接 EE',$A'P$,过点 A'作 $A'G\perp DC$,交 AB,CD 于点 F,G,则 $\angle EBE'=\angle ABA'=60^\circ$,$FG=CB=AB=A'B=2$,$AE=A'E'$,$BE=BE'$,$\therefore \triangle BEE'$ 是等边三角形,$\therefore BE=EE'$,$\therefore AE+BE+PE=A'E'+E'E+EP$,$\therefore$ 当 A',E',E,P 四点共线且 $A'P\perp CD$ 时,$AE+BE+PE$ 取得最小值,为 $A'G$ 的长. $\because \angle A'FB=90^\circ$,$\angle ABA'=60^\circ$,$\therefore \angle BA'F=30^\circ$,$\therefore BF=\dfrac{1}{2}A'B=1$,$\therefore A'F=\sqrt{A'B^2-BF^2}=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$,$\therefore A'G=A'F+FG=\sqrt{3}+2$,$\therefore AE+EP+BE$ 的最小值是$\sqrt{3}+2$,故答案为$\sqrt{3}+2$.



全章综合训练

刷中考

1. **C** 【解析】在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 互相垂直平分，$\therefore AB=AD, CB=CD, BA=BC$，$\therefore BC=CD=DA=AB$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形．$\because AB=3$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的周长为 $3\times4=12$．故选 C．

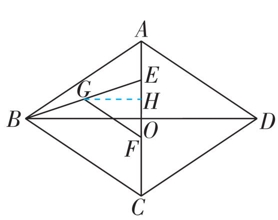
2. **D** 【解析】由尺规作图可知 $AB=AD=BC=DC$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AB/\!/CD$，$\angle BDC=\angle ADB=\frac{1}{2}\angle ADC$，$\therefore \angle A+\angle ADC=180°$．$\because \angle A=40°$，$\therefore \angle ADC=180°-\angle A=140°$，$\therefore \angle BDC=\frac{1}{2}\angle ADC=70°$．故选 D．

3. $\underline{15}$ 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，$\therefore S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times6\times5=15$，故答案为 15．

4. $\underline{1}$ 【解析】在菱形 $ABCD$ 中，$OC=OA=2$，$AC\perp BD$，$AB/\!/CD$，$\therefore \angle OAB=\angle OCD$．又$\because \angle AOE=\angle COF$，$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$（ASA），$\therefore S_{\triangle AOE}=S_{\triangle COF}$，$\therefore S_{\triangle AOE}+S_{\triangle DOF}=S_{\triangle COF}+S_{\triangle DOF}=S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}\cdot OC\cdot OD=1$．故答案为 1．

关键点拨 根据菱形的性质证明$\triangle AOE\cong\triangle COF$，则$\triangle AOE$的面积$=\triangle COF$的面积，进而可以解决问题．

5. $\underline{\sqrt{13}}$ 【解析】在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AC=8$，$BD=12$，$\therefore OA=\frac{1}{2}AC=4$，$OB=\frac{1}{2}BD=6$，$AC\perp BD$．$\because AE=2$，$\therefore OE=OA-AE=4-2=2$．如图，取 OE 中点 H，连接 GH．$\because$ 点 G 为 BE 的中点，点 H 为 OE 的中点，$\therefore GH$ 是 $\triangle EBO$ 的中位线，$\therefore GH=\frac{1}{2}OB=3$，$GH/\!/OB$，$\therefore \angle GHE=\angle BOA=90°$．$\because OF=1$，$\therefore HF=OH+OF=\frac{1}{2}OE+OF=\frac{1}{2}\times2+1=2$，$\therefore$ 在 $Rt\triangle GFH$ 中，由勾股定理得 $GF=\sqrt{GH^2+HF^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，故答案为 $\sqrt{13}$．



6. 【证明】$\because AB=5$，$OA=4$，$OB=3$，$\therefore AB^2=25=9+16=OB^2+OA^2$，$\therefore \angle AOB=90°$，$\therefore AC\perp BD$，$\therefore \square ABCD$ 是菱形．

7. **A** 【解析】选项 A，$\because$ 矩形的对角线相等，而菱形的对角线不一定相等，$\therefore$ 该选项矩形具有而菱形不具有，故选项 A 符合题意；选项 B，$\because$ 矩形和菱形的对角线都互相平分，$\therefore$ 该选项矩形和菱形都具有，故选项 B 不符合题意；选项 C，$\because$ 菱形的对角线互相垂直，而矩形的对角线不一定互相垂直，$\therefore$ 该选项菱形具有而矩形不具有，故选项 C 不符合题意；选项 D，$\because$ 矩形和菱形的对角都相等，$\therefore$ 该选项矩形和菱形都具有，故选项 D 不符合题意．故选 A．

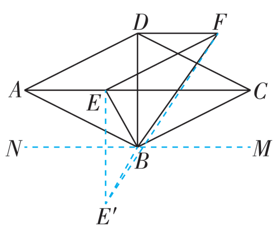
8. **D** 【解析】在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$\therefore \angle A=\angle D=90°$，$AD=BC$，$CD=AB=3$，$\therefore$ 在 $Rt\triangle ABE$ 中，由勾股定理得 $BE=\sqrt{AE^2+AB^2}=5$，$\therefore BC=BE=5$，$\therefore AD=5$，$\therefore DE=AD-AE=1$，$\therefore$ 在 $Rt\triangle CDE$ 中，由勾股定理得 $CE=\sqrt{CD^2+DE^2}=\sqrt{10}$．故选 D．

9. **D** 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore AD/\!/BC$，$\angle C=90°$，$\therefore \angle ADB=\angle1$．$\because$ 将矩形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折叠，点 A 落在 A' 处，$\therefore \angle ADB=\angle A'DB$，$\therefore \angle1=\angle A'DB$，$\therefore \angle DEC=2\angle1=2\angle A'DB$．$\because$ 在 $Rt\triangle DEC$ 中，$\angle DEC=90°-\alpha$，即 $2\angle1=90°-\alpha$，$\therefore \angle1=45°-\frac{1}{2}\alpha$，故 A 不正确．$\because$ 将$\triangle CDE$ 沿 DE 折叠，点 C 落在$\triangle BDE$ 内的 C' 处，$\therefore \angle C'DE=\angle CDE$．又$\because \angle BDE>\angle C'DE$，$\therefore \angle BDE\neq\angle CDE$，$\therefore \angle1\neq\alpha$，故 B 不正确．由折叠得 $\angle C'ED=\angle CED$，$\therefore \angle2=180°-2\angle CED=180°-2(90°-\alpha)=2\alpha$，故 C 不正确，D 正确．故选 D．

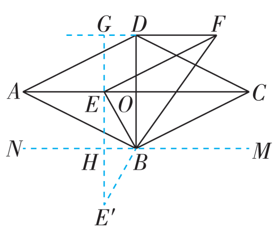
关键点拨 将 E 在线段 AC 上运动看做 EF 为定线段，菱形 $ABCD$ 在 AC 方向上水平运动是解题的关键．

10. $\underline{\sqrt{13}}$ 【解析】$\because$ 四边形 $DAEF$ 为平行四边形，$\therefore EF=AD$，$DF=AE$．$\because E$ 为线段 AC 上的动点，$\therefore$ 可以看做 EF 是定线段，菱形 $ABCD$ 在 AC 方向上水平运动，则如图(1)，点 B 的运动轨迹为线段 MN，过点 E 作关于线段 MN 的对称点 E'，连接 $E'F$，BE'，由对称性得 $BE=BE'$，$\therefore BE+BF=BE'+BF\leqslant E'F$，只有当 E'，B，F 共线时，$BE+BF$ 取得最小值 $E'F$，此时如图(2)，设 AC 与 BD 交于点 O，EE' 交 MN 于点 H，延长 $E'E$ 交 FD 延长线于点 G．$\because$ 菱形 $ABCD$ 中，$AC=4$，$BD=2$，$\therefore AO=\frac{1}{2}AC=2$，$BO=DO=\frac{1}{2}BD=1$，$AC\perp BD$．由题意可得

$AC//MN$，由对称性可得 $EH\perp HB$，$\therefore AC\perp GH$，$\therefore \angle OEH=\angle EOB=\angle EHB=90^\circ$，$\therefore$ 四边形 $EOBH$ 是矩形，$\therefore EH=E'H=OB=1$. $\because$ 四边形 $DAEF$ 为平行四边形，$\therefore DF//AC$，$\therefore GD\perp DO$，$\therefore \angle GDO=\angle DOE=\angle GEO=90^\circ$，$\therefore$ 四边形 $DOEG$ 是矩形，$\therefore GD=EO$，$GE=DO=1$，$\therefore GF=GD+DF=EO+AE=AO=2$，$GE'=GE+EH+E'H=3$，$\therefore E'F=\sqrt{GF^2+GE'^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，即 $BE+BF$ 的最小值为 $\sqrt{13}$，故答案为 $\sqrt{13}$.

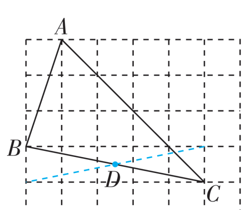


图(1)



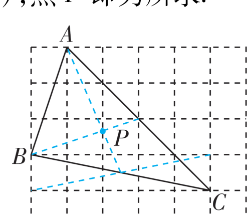
图(2)

11.【解】(1)如图(1)，点 D 即为所求.



图(1)

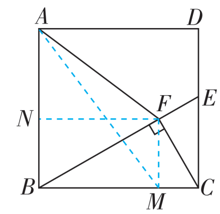
(2)如图(2)，点 P 即为所求.



图(2)

12. A 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，且边长为 5，$\therefore AB=BC=CD=AD=5$. $\because$ 点 $B(0,-2)$，$\therefore OB=2$，$\therefore OA=AB-OB=3$. 由旋转的性质得 $OA'=OA=3$，且点 A' 在 x 轴的负半轴上，正方形 $A'B'C'D'$ 的边长为 5，$\therefore \angle D'A'O=90^\circ$，$\therefore$ 点 D' 的坐标为 $(-3,5)$. 故选 A.

13. $\frac{3}{8}$ 【解析】如图，过点 F 作 $FM\perp BC$，$FN\perp AB$，垂足分别为 M，N，连接 AM，则 $\angle FMC=90^\circ$.



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore \angle ABC=90^\circ$，$\therefore \angle ABC=\angle FMC$，$\therefore AB//FM$，$\therefore FN=BM$. $\because S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}AB\cdot FN$，$S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}AB\cdot BM$，$\therefore S_{\triangle ABF}=S_{\triangle ABM}$. $\because CF\perp BE$，$AB=1=BC$，$\angle EBC=30^\circ$，$\therefore \angle BCF=60^\circ$，$CF=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$，$\therefore \angle CFM=90^\circ-\angle BCF=30^\circ$，$\therefore CM=\frac{1}{2}CF=\frac{1}{4}$，$\therefore BM=BC-CM=\frac{3}{4}$，$\therefore S_{\triangle ABF}=S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}\times1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$，故答案为 $\frac{3}{8}$.

14.【解】(1)$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，BD 是其对角线，

$\therefore BA=BC$，$\angle ABD=\angle CBD=45^\circ$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CBE$ 中，$\because \begin{cases}BA=BC,\\ \angle ABE=\angle CBE,\\ BE=BE,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CBE(\mathrm{SAS})$.

(2)$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，BD 是其对角线，$\therefore \angle BAD=90^\circ$，$\angle ADB=45^\circ$.

$\because DE=DA$，$\therefore \angle DAE=\angle DEA=67.5^\circ$，

$\therefore \angle BAE=\angle BAD-\angle DAE=90^\circ-67.5^\circ=22.5^\circ$.

关键点拨

解题关键是由直角三角形斜边上的中线的性质推出 $CD=AD=BD$.

15. C 【解析】在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中，$\because \angle ACB=90^\circ$，$D$ 为 AB 中点，$\therefore CD=\frac{1}{2}AB=AD=BD$，$\therefore \angle A=\angle ACD=20^\circ$，$\angle B=\angle BCD=90^\circ-20^\circ=70^\circ$. $\because DE\perp AC$，$\therefore \angle AED=\angle CED=90^\circ$，$\therefore \angle ADE=\angle CDE=90^\circ-20^\circ=70^\circ$. $\because \angle A=20^\circ$，$\therefore \angle A$ 的余角为 70°，$\therefore$ 题图中与 $\angle A$ 互余的角是 $\angle B$，$\angle DCB$，$\angle CDE$，$\angle ADE$，共有 4 个. 故选 C.

16. C 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\angle ADB=35^\circ$，$\therefore AD//BC$，$\angle ABC=90^\circ$，$\therefore \angle PBF=\angle ADB=35^\circ$. $\because$ 点 P 是 EF 的中点，$\therefore PB$ 是 $\mathrm{Rt}\triangle BEF$ 的斜边 EF 上的中线，$\therefore PB=PF=PE$，$\therefore \angle PFB=\angle PBF=35^\circ$. 在 $\triangle PBF$ 中，$\angle BPF=180^\circ-(\angle PFB+\angle PBF)=110^\circ$，$\therefore \angle DPE=\angle BPF=110^\circ$. 故选 C.

思路分析

根据三角形中位线定理求出 DE 的长，再根据直角三角形斜边上的中线的性质求出 FE 的长，进而求出 DF 的长.

17. 6 【解析】$\because$ 点 D，E 分别是边 AB，BC 的中点，$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，$\therefore DE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times4=2$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BFC$ 中，E 是斜边 BC 的中

点，$BC=8$，则 $FE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times8=4$，$\therefore DF=DE+FE=2+4=6$，故答案为 6.

刷章测

1. B 【解析】$\because\angle ABC=90^\circ$，$\angle C=55^\circ$，$\therefore\angle A=90^\circ-55^\circ=35^\circ$. $\because BD$ 是斜边 AC 上的中线，$\therefore AD=BD=DC$，$\therefore\angle ABD=\angle A=35^\circ$. 故选 B.

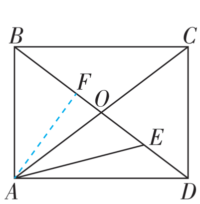
2. B 【解析】选项 A，矩形、正方形具有对角线相等的性质，而菱形不一定具有；选项 B，矩形、菱形、正方形都具有对角线互相平分的性质；选项 C，菱形、正方形具有对角线互相垂直的性质，而矩形不一定具有；选项 D，菱形、正方形具有对角线平分对角的性质，而矩形不一定具有. 综上所述，矩形、菱形、正方形都具有的性质是对角线互相平分. 故选 B.

3. A 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore\angle CAB=\angle CAD=\angle ACD=30^\circ$，$\therefore\angle ADC=\angle ABC=120^\circ$. $\because\angle CDE=90^\circ$，$CE=2$，$\therefore$ 易得 $\angle ADE=\angle EAD=30^\circ$，$DE=1$，$\therefore AE=DE=1$，故选 A.

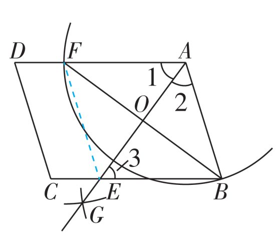
4. C 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AB=BC=CD=AD$，$\angle BAD=90^\circ$，$\angle BAC=45^\circ$. $\because\triangle ADE$ 是等边三角形，$\therefore AD=AE=DE$，$\angle DAE=60^\circ$，$\therefore AE=AB$，$\angle BAE=\angle BAD+\angle DAE=150^\circ$，$\therefore\angle ABE=\angle AEB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BAE)=\frac{1}{2}\times(180^\circ-150^\circ)=15^\circ$，$\therefore\angle BFC=\angle BAC+\angle ABE=45^\circ+15^\circ=60^\circ$. 故选 C.

5. A 【解析】如图，过点 A 作 $AF\perp BD$ 于 F. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=8$，$\therefore AD=8$，$BD=AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=10$. $\because$ 对角线 AC，BD 相交于点 O，$\therefore OB=OD=\frac{1}{2}BD=5$. $\because E$ 为 OD 的中点，$\therefore DE=\frac{1}{2}OD=2.5$. $\because S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD=\frac{1}{2}BD\cdot AF$，$\therefore AF=\frac{AB\cdot AD}{BD}=\frac{6\times8}{10}=4.8$，$\therefore\triangle AED$ 的面积为 $\frac{1}{2}DE\cdot AF=\frac{1}{2}\times2.5\times4.8=6$. 故选 A.

思路分析 过点 A 作 $AF\perp BD$ 于 F，根据勾股定理求出 $BD=AC=10$，进而求出 DE 的长度，利用面积法求出 AF 的长度，从而求出 $\triangle AED$ 的面积.



(第 5 题图)

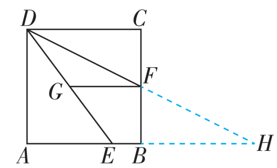


(第 6 题图)

6. D 【解析】连接 EF，设 AE 与 BF 交于点 O，如图. $\because AO$ 平分 $\angle BAD$，$\therefore\angle1=\angle2$. $\because AF\parallel BE$，$\therefore\angle1=\angle3$，$\therefore\angle2=\angle3$，$\therefore AB=EB$. 由作图可得 $AB=AF$，$\therefore AF=BE$. 又$\because AF\parallel BE$，$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形. $\because AB=AF$，$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是菱形，$\therefore AE\perp BF$，$OB=OF=8$，$OA=OE$. $\because OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，$\therefore AE=2OA=12$. 故选 D.

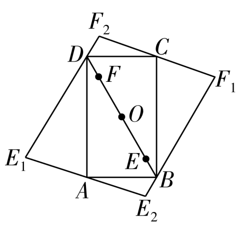
思路分析 首先证明四边形 $ABEF$ 是菱形，得到 $AE\perp BF$，$OB=OF=8$，$OA=OE$，利用勾股定理计算出 AO 的长，从而得到 AE 的长.

7. B 【解析】延长 DF 交 AB 的延长线于点 H，如图所示. $\because AE=3$，$BE=1$，$\therefore AB=AE+BE=4$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore AD=AB=BC=CD=4$，$\angle A=\angle ABC=\angle C=90^\circ$，$AB\parallel CD$. 在 Rt$\triangle ADE$ 中，由勾股定理得 $DE=\sqrt{AD^2+AE^2}=5$. $\because DF$ 平分 $\angle EDC$，$\therefore\angle CDF=\angle EDF$. $\because AB\parallel CD$，$\therefore\angle CDF=\angle H$，$\angle C=\angle CBH=90^\circ$，$\therefore\angle EDF=\angle H$，$\therefore EH=DE=5$，$\therefore BH=EH-BE=5-1=4$，$\therefore CD=BH$. 在$\triangle CDF$ 和$\triangle BHF$ 中，$\begin{cases}\angle C=\angle FBH=90^\circ,\\CD=BH,\\\angle CDF=\angle H,\end{cases}$ $\therefore\triangle CDF\cong\triangle BHF$(ASA)，$\therefore CF=BF$. $\because$ 点 G 是 DE 的中点，$\therefore GF$ 是$\triangle DEH$ 的中位线，$\therefore GF=\frac{1}{2}EH=2.5$. 故选 B.

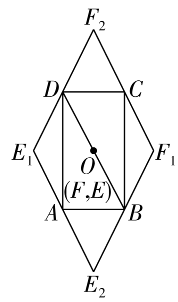


8. A 【解析】如图(1)，当点 E，F 分别靠近点 B，D 时，$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore AB\parallel CD$，$\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$，$\therefore\angle BDC=\angle ABD=60^\circ$，$\angle ADB=\angle CBD=90^\circ-60^\circ=30^\circ$. $\because OE=OF$，$OB=OD$，$\therefore DF=EB$. $\because$ 点 E 关于 AD，AB 的对称点分别为 E_1，E_2；点 F 关于 BC，CD 的对称点分别为 F_1，F_2，$\therefore\angle F_2DC=\angle CDF=60^\circ$，$\angle EDA=\angle E_1DA=30^\circ$，$DF=DF_2$，$BF=BF_1$，$BE=BE_2$，$DE=DE_1$，$\therefore\angle E_1DB=60^\circ$，易得 $E_1F_2=E_2F_1$. 同理可得 $\angle F_1BD=60^\circ$，$\therefore DE_1\parallel BF_1$. $\because E_1F_2=E_2F_1$，$\therefore$ 四边形 $E_1E_2F_1F_2$ 是平行四边形. 如图(2)所示，当 E，F，O 三点重合时，$DO=OB$，易得 $DE_1=DF_2=AE_1=AE_2$，即 $E_1E_2=E_1F_2$，$\therefore$ 平行四边形 $E_1E_2F_1F_2$ 是菱形. 如图(3)所示，当 E，F 分别为 OB，OD 的中点时，设 $DB=4$，则 $DF_2=DF=1$，$DE_1=DE=3$. 在 Rt$\triangle ABD$ 中，$AB=\frac{1}{2}BD=2$，则 $AD=\sqrt{12}$. 连接 AE，AO. $\because\angle ABO=60^\circ$，$BO=2=AB$，$\therefore\triangle ABO$ 是等边三角形. $\because E$ 为 OB 中点，$\therefore AE\perp OB$，$BE=1$，$\therefore AE=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. 根据对称性可得 $AE_1=AE=\sqrt{3}$. $\because AD^2=12$，$DE_1^2=9$，$AE_1^2=3$，$\therefore AD^2=AE_1^2+DE_1^2$，$\therefore\triangle DE_1A$ 是直角三角形，且 $\angle E_1=90^\circ$，$\therefore$ 平行四边形 $E_1E_2F_1F_2$ 是矩

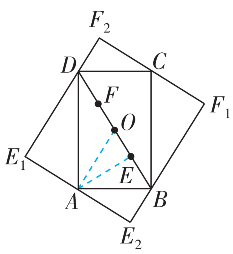
形. 如图(4)所示,当 F,E 分别与 D,B 重合时,$\triangle BE_1D$,$\triangle BDF_1$ 都是等边三角形,则易知四边形 $E_1E_2F_1F_2$ 是菱形. ∴ 在整个过程中,四边形 $E_1E_2F_1F_2$ 形状的变化依次是菱形→平行四边形→矩形→平行四边形→菱形,故选 A.



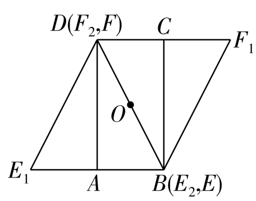
图(1)



图(2)



图(3)



图(4)

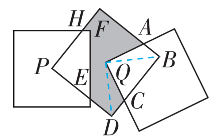
9. $AC=BD$(答案不唯一) 【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,$AC=BD$,∴ 菱形 $ABCD$ 为正方形. 故答案为 $AC=BD$(答案不唯一).

10. 6 【解析】由矩形的性质可得 $BC=AD=8$. 由折叠的性质可得 $\angle AFE=\angle B=90°$,$AB=AF$,$BE=EF=3$,∴ $EC=BC-BE=8-3=5$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle EFC$ 中,由勾股定理得 $FC=\sqrt{EC^2-EF^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,由勾股定理得 $AB^2+BC^2=AC^2$,即 $AB^2+8^2=(AB+4)^2$,解得 $AB=6$. 故答案为 6.

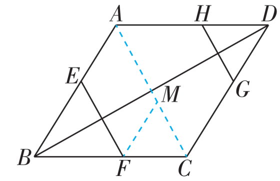
关键点拨 由折叠得到相等的边和角,再根据已知条件在直角三角形中运用勾股定理求解.

11. 3 【解析】如图所示,连接 QB,QD. ∵ 点 Q 是中间正方形的中心,也是右侧正方形的一个顶点,图中三个正方形的面积都是 6,∴ $\angle AQC=90°$,$QB=QD$,$\angle BQD=90°$,$\angle QBA=\angle QDC=45°$,$S_{\triangle BQD}=\frac{1}{4}\times6=\frac{3}{2}$. ∵ $\angle AQB+\angle BQC=90°$,$\angle DQC+\angle BQC=90°$,∴ $\angle AQB=\angle DQC$. 在 $\triangle AQB$ 和 $\triangle CQD$ 中,$\begin{cases}\angle AQB=\angle CQD,\\ QB=QD,\\ \angle QBA=\angle QDC,\end{cases}$ ∴ $\triangle AQB\cong\triangle CQD$(ASA),∴ $S_{\triangle AQB}=S_{\triangle DQC}$,∴ $S_{四边形QABC}=S_{\triangle AQB}+S_{\triangle QBC}=S_{\triangle DQC}+S_{\triangle QBC}=S_{\triangle BQD}=\frac{3}{2}$. 同理可得 $S_{四边形PEFH}=\frac{3}{2}$,∴ $S_{阴影}=6-S_{四边形QABC}-S_{四边形PEFH}=6-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=3$. 故答案为 3.

关键点拨 将四边形 $QABC$ 的面积转化为 $\triangle BQD$ 的面积是解题的关键.



(第 11 题图)



(第 12 题图)

12. 10 【解析】如图,连接 AC,过 F 作 $FM/\!/AB$ 交 AC 于 M,∴ $\angle CFM=\angle ABC$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,∴ $AB=BC=CD=AD$,$\angle GDH=\angle EBF$,$AC\perp BD$,BD 平分 $\angle ABC$,∴ $\angle CFM=\angle GDH$. ∵ $BE=BF$,∴ $BD\perp EF$,∴ $EF/\!/AC$. 又 ∵ $AE/\!/FM$,∴ 四边形 $AEFM$ 是平行四边形,∴ $AM=EF$,$FM=AE$. ∵ $BE=BF=CG=AH$,∴ $CF=GD=HD=AE$,∴ $FM=FC=DH=DG$. ∵ $\angle CFM=\angle GDH$,∴ $\triangle FCM\cong\triangle DGH$(SAS),∴ $CM=GH$,∴ $EF+GH=AM+CM=AC$. ∵ 菱形 $ABCD$ 的面积 $=\frac{1}{2}AC\cdot BD=120$,$BD=24$,∴ $AC=10$,∴ $EF+GH=10$. 故答案为 10.

13. $(-3,5)$ 【解析】过点 C 作 $CF\perp x$ 轴交 x 轴于点 F,过点 B 作 $BE\perp FC$ 交 FC 的延长线于点 E,交 y 轴于点 D. ∵ 正方形 $OABC$ 的顶点 B 在直线 $y=4x$ 上,∴ 设 $B(x,4x)$,∴ $OB^2=x^2+(4x)^2=17x^2$. ∵ 正方形 $OABC$ 的面积是 34,∴ $OA^2=AB^2=34$,$\angle A=90°$,∴ $OB^2=OA^2+AB^2=68$,∴ $17x^2=68$,∴ $x=2$(负值舍去),∴ $B(2,8)$,∴ $OD=8$,$BD=2$. ∵ $CF\perp x$ 轴,$BE\perp FC$,$\angle DOF=90°$,∴ 四边形 $EFOD$ 是矩形,∴ $EF=OD=8$. ∵ $\angle E=90°$,∴ $\angle ECB+\angle EBC=90°$. ∵ $\angle BCO=90°$,∴ $\angle ECB+\angle FCO=90°$,∴ $\angle EBC=\angle FCO$. 又 ∵ $\angle E=\angle CFO=90°$,$BC=CO$,∴ $\triangle BEC\cong\triangle CFO$(AAS),∴ $EC=FO$,$BE=CF$. 设 $EC=FO=ED=a$,则 $CF=EF-EC=8-a$,$BE=DE+BD=a+2$. ∵ $BE=CF$,∴ $a+2=8-a$,∴ $a=3$,∴ $FO=3$,$CF=8-a=5$,∴ 点 C 的坐标为 $(-3,5)$. 故答案为 $(-3,5)$.

14. (1)【证明】∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,∴ $AD/\!/BC$ 且 $AD=BC$. ∵ $BE=CF$,∴ $BE+EC=CF+EC$,∴ $BC=EF$,∴ $AD=EF$. ∵ $AD/\!/EF$,∴ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形. ∵ $AE\perp BC$,∴ $\angle AEF=90°$,∴ 四边形 $AEFD$ 是矩形.

(2)【解】∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,∴ $AC\perp BD$,$AO=CO$,$AB=BC=AD=5$. ∵ $AE\perp BC$,∴ $\angle AEB=\angle AEC=90°$,∴ $AC=2OE=6$. ∵ $AB^2-BE^2=AC^2-CE^2=AE^2$,∴ $5^2-BE^2=6^2-$